

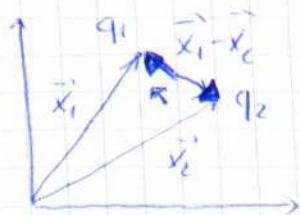
Summe von Punktladungen hat Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

- Flächenladungsdichte: $\sigma(\vec{x}) = \frac{dq}{dA}$
- Linienladungsdichte: $\lambda(\vec{x}) = \frac{dq}{dl}$



(2.2) Coulombsches Gesetz



- zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 im Vakuum wirkt eine Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

abstoßend für $q_1 q_2 > 0$

anziehend für $q_1 q_2 < 0$

- aus dieser (experimentellen) Beobachtung kann alles weitere hergeleitet werden

- Coulomb-Gesetz ist erstaunlich akkurat:

$$F \propto \frac{1}{r^{2+\epsilon}} \quad \text{mit} \quad \epsilon < 2.7 \cdot 10^{-16}$$

$$V \propto \frac{e^{Mr}}{r} \quad \text{mit} \quad m_g = \frac{Mh}{c} \text{ (Photonmasse)} < 4 \cdot 10^{-18} \text{ kg} = 4 \cdot 10^{-21} m_e$$

Gravitation: ähnlich aber
 (→) Extra Dimensionen?

(2.3) Elektrostatisches Feld und Skalarpotential

- wenn auf eine Ladung q am Ort \vec{x} eine Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ wirkt, definieren wir \vec{E} als Kraft pro Ladungseinheit

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{q} \vec{F}(\vec{x})$$

und zwar im Grenzfall kleiner Ladung, so daß Feld nicht gestört wird

also genau

$$\vec{E} = \frac{d\vec{F}}{dq}$$

• Folge: elektr. Feld am Ort \vec{x} :

- Punktladung q am Ort \vec{x}' (folgt aus Coulomb Gesetz)

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

- Anordnung von Punktladungen (Additivität)

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'_i|^3}$$

- Ladungsdichte $\rho(\vec{x}')$

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

• aus der Identität $\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ (s. Kap 1.2) folgt

$$E(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

d.h. \vec{E} kann als Gradient eines Skalarpotentials geschrieben werden

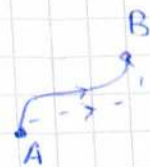
$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- N.B.:
- Φ ist nicht eindeutig definiert, bzw. $\vec{\nabla}(\Phi + \text{const}) = \vec{\nabla}\Phi$
 - Elektr. Feld ist wirbelfrei: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
(folgt aus $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0$)

• Phys. Bedeutung des Skalarpotentials:

zu leistende Arbeit für den Transport einer Ladung q von A nach B

$$\begin{aligned} W &= - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^B \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{\ell} = \\ &= q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A) \end{aligned}$$



d.h. $q\Phi$ = potentielle Energie der Punktladung q

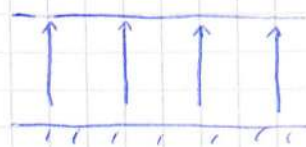
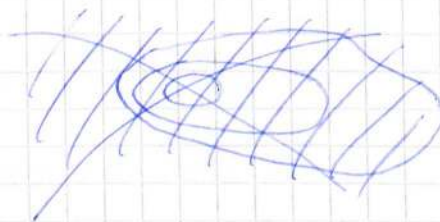
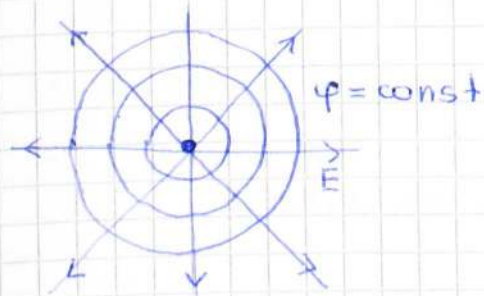
N.B.:

- die Arbeit hängt nicht vom Weg ab

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{Zirkulation} = 0)$$

C - geschlossen

24. graphische Darstellung von \vec{E} und $\vec{\Phi}$:
Feldlinien und Potentiallinien



(2.4) Poisson- und Laplacegleichung

wende $\vec{\nabla}^2$ auf Φ an

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') (-4\pi) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{Kap. 1.5}\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad \text{Poisson Gl.}$$

bzw. in Gebieten ohne Ladungen

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) = 0 \quad \text{Laplace Gl.}$$

(2.5) Gaußsches Gesetz

- betrachte Volumen V eingeschlossen von Oberfläche S

$$\begin{aligned}\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\Phi} &\stackrel{(\text{Gauß})}{=} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = - \int_V d^3x \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad \text{Gaußsches Gesetz}\end{aligned}$$

q ist im Volumen V enthaltene Ladung

- differentielle Form

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \quad \text{für beliebiges Volumen}$$

\Rightarrow

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(folgt natürlich auch sofort aus Poisson-Gl. und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$)²⁵

(2.6) Maxwell-Gl. der Elektrostatik (Vakuum)

- $\vec{B} = 0$, da keine Ströme
- Differentialform

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

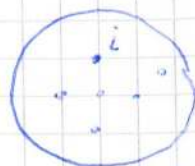
- Integralform

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} q_V \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- Potentialform

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(2.7) Elektrostatische Energie



n Punktladungen

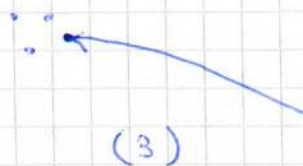
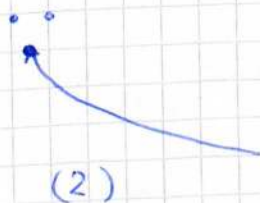
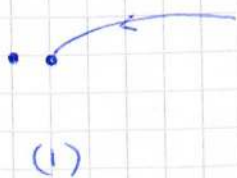
- wie schon in Kap. 2.3 gezeigt:

$$W_i = q_i \Phi(\vec{x}_i) \quad \text{pot. Energie einer Punktladung am Punkt } \vec{x}_i \text{ im Feld } \Phi$$

- im Feld von $n-1$ anderen Punktladungen

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

- gesamte potentielle Energie allen n Ladungen:
bringe Ladungen nacheinander ins betrachtete Raumgebiet



$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

↑
Schritt

- für kontinuierliche Ladungsdichten

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \iint d^3x d^3x' \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- umschreiben:

Poisson-Gl.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \stackrel{\downarrow}{=} - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \Phi(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x |\vec{E}|^2(\vec{x}) \\ &\quad \uparrow \text{partielle Integration} \end{aligned}$$

→ Energiedichte des elektr. Feldes:

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2(\vec{x})$$

beachte: kein expliziter Bezug mehr auf Ladungen
Energie im Feld gespeichert

- Bsp: klassischer Elektronenradius

Idee: $W = m_e c^2 \stackrel{!}{=} \text{Energie des elektr. Feldes eines Elektrons}$

Einfachste Annahme: Ladung gleichförmig im Volumen verteilt



$$E_{\text{außen}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R$$

$$E_{\text{innen}} = \frac{q_{\text{in}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e r}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad r \leq R$$

$$q_{\text{in}} = e \left(\frac{r^3}{R^3} \right) \leftarrow \text{Gauß}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[\int_R^\infty 4\pi r^2 dr \cdot \frac{1}{r^4} + \int_0^R 4\pi r^2 dr \cdot \frac{r^2}{R^6} \right]$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{5R} \right] = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

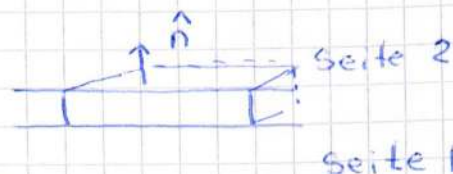
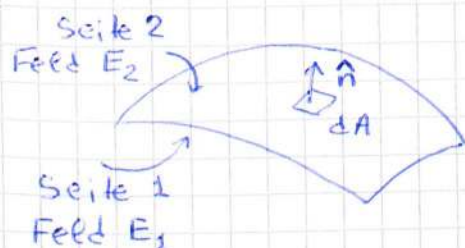
$$\rightarrow R_{\text{kl}} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Experiment: (Streuung)

$$R < 10^{-20} \text{ m}$$

→ Klassisches Bild ist falsch(2.8) Feldverhalten an Grenzflächen

betrachte eine Flächenladung mit Dichte $\sigma(\vec{x})$
wie verhält sich das Feld beim Durchgang durch die Fläche



- Gaußsches Gesetz für dA :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{x}) dA$$

und damit

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{x})$$

bzw

$$(E_2)_\perp - (E_1)_\perp = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{x})$$

d.h. die Normalkomponente von \vec{E} macht einen Sprung

- Wirbelfreiheit



$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = [(E_2)_\parallel - (E_1)_\parallel] dl$$

$$\text{für alle } dl \rightarrow (E_2)_\parallel = (E_1)_\parallel$$

⇒ die Tangentialkomponente von \vec{E} ist stetig

NB das Skalarpotential Φ ist überall im Raum stetig
(falls nicht, würde \vec{E} an der Grenzfläche divergieren)

aber

Φ divergiert bei Linien- und Punktladungen

(2.9) Kapazität und Kondensator

"Leiter": Potential $\Phi = \text{const}$ (sonst \vec{E} , \rightarrow Ströme)

Fragestellung: ("Kondensatorproblem")

- betrachte ein System aus n Leitern mit Potentialen Φ_i und Ladungen Q_i
- Potentiale sind immer linear in der Ladungen \rightarrow
 \rightarrow muß gelten

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j$$

Gleichungssystem läßt sich invertieren:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \Phi_j \quad (p^{-1} = C) \text{ Matrx}$$

die C_{ij} hängen nur von der Geometrie des Problems ab

C_{ii} = Kapazität des Leiters i

C_{ij} , = Kapazitätskoeffizienten ($i \neq j$)

d.h. Kapazität eines Leiters = seine Ladung, wenn er sich auf Einheitspotential befindet und alle anderen Leiter auf Potential 0 sind

$\Phi=1$



- potentielle Energie des Leitersystems

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \Phi_i \Phi_j$$

- Kondensator im engeren Sinne: Anordnung zweier Metallkörper mit gleich großen, entgegengesetzten Ladungen:

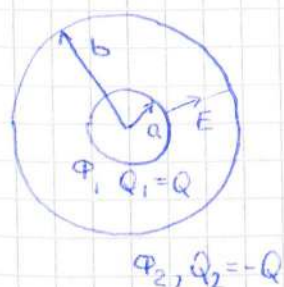
$$n = 2 \quad Q_1 = -Q_2 = Q$$

Potentialdifferenz (Spannung) $V = \Phi_1 - \Phi_2$

Dann

 $Q = CV$ mit Kapazität (Aufnahmefähigkeit) C

• Bsp. Kugelkondensator



Gaußsches Gesetz

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

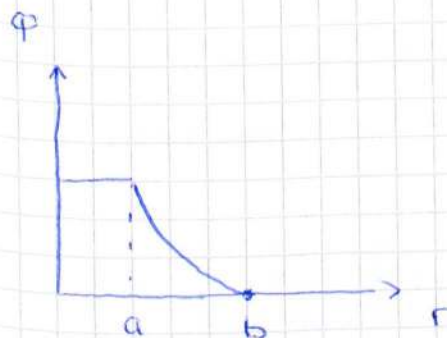
 \Rightarrow

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases} \quad \vec{E}(r) = E(r) \cdot \hat{r}$$

Potential:

löse $\Phi(r) = \int dr E(r)$ mit $\Phi(\infty) = \text{const} \rightarrow 0$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a} - \frac{Q}{b} \right) & (r < a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{b} \right) & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$



$$\text{d.h. } \Phi_2 \equiv \Phi(b) = 0 ; \quad \Phi_1 \equiv \Phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

(2.10) Randwertprobleme I: Klassifikation

das typische Problem der Elektrostatik:

gegeben seien

- ein begrenztes Raumgebiet V mit geschlossener Oberfläche S ("Rand")
- eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ in V
- Randbedingungen für das Potential Φ auf S

gesucht ist die Lösung der Poisson-Gl. $\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ in V
 (und aus Φ kann dann alles weitere abgeleitet werden)

\rightarrow Randwertproblem (RWP)

Fragestellung hier: (für diesen Abschnitt)

Wie müssen die Randbedingungen auf S spezifiziert werden, damit die Poisson-Gl. eine eindeutige Lösung hat?

- Dirichletsches RW-Problem: Potential Φ auf Rand S vorgegeben
- Neumannsches RW-Problem: Komponente E_{\perp} des elektrischen Feldes \perp zum Rand vorgegeben:

$$\left(= -\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\vec{\nabla} \Phi \cdot \hat{n} \right)$$

Phys. Bezug:

- bei Metallen: Ladungsträger sind frei beweglich
 \rightarrow stellen sich so ein, daß
 - im Inneren gar keine Kräfte auf sie wirken
 - an der Oberfläche keine Kräfte \parallel zu Oberfläche auf sie wirken
- $\rightarrow E_{\parallel} = 0 \rightarrow \Phi = \text{const. auf } S$ (Dirichlet)
- i.A. $E_{\perp} \neq 0$ (Neumann)

In beiden Fällen ist die Lösung eindeutig

Beweis:

nimm an, es gäbe zwei Lösungen $\Phi_1 \neq \Phi_2$ und definiere $\bar{U} = \Phi_2 - \Phi_1$
 $\rightarrow \vec{\nabla}^2 \bar{U} = 0$ in V und $\bar{U} = 0$ (Dirichlet) bzw. $\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} = 0$ (Neumann) auf S

1. Greensche Identität: $u = v = \bar{U}$

$$\int_V d^3x \left[\cancel{\bar{U} \vec{\nabla}^2 \bar{U}} + |\vec{\nabla} \bar{U}|^2 \right] = \oint_S dA \bar{U} \cancel{\frac{\partial \bar{U}}{\partial n}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \int_V d^3x |\vec{\nabla} \bar{U}|^2 = 0 \quad \text{entweder } \bar{U} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} = 0 \quad \text{und damit } \vec{\nabla} \bar{U} = 0 \text{ auf } \bar{V}$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \text{const} \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 + \text{const}$$

↑
physikalisch unbedeutend

NB:

- Lösung ist auch eindeutig für gemischte Randbed.
(Φ auf Teil von S , $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ auf Komplement)
- im Inneren einer beliebigen geschlossenen Metallfläche $\vec{E}=0$:
 - im Inneren gibt es keine Ladungen, d.h. $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$
 - $\Phi = \Phi_0$ auf S
 - $\rightarrow \Phi = \Phi_0$ in V ist eine Lösung, diese ist eindeutig
 - $\rightarrow \vec{E} = 0$ (Faradayscher Käfig)

d.h. beliebige äußere Felder werden durch einen Metallkäfig abgeschirmt.

2.11 RW-Probleme II: Greensche Funktion

\Leftarrow allg. Methode zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen

$$D y(x) = f(x)$$

$$\text{vgl. } \vec{\nabla}^2 \Phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

$D =$ beliebiger Differentialoperator

Idee:

- Greensche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$ ist eine Lösung von

$$D_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

- bestimmt durch Form von D und Randbedingungen
- G ist unabhängig von $f(x)$
- Lösung des allg. Problems folgt durch Integration über alle Punkte mit Gewichtsfunktion $f(x)$:

$$y(x) = \int dx' f(x') G(x, x')$$

Prüfen:

$$D y(x) = \int dx' f(x') D_x G(x, x') = \int dx' f(x') \delta(x, x')$$

Randbedingungen auf $y(x) \Rightarrow$ Randbedingungen auf G

zur Elektrodynamik:

- G entspricht der Lösung des "Punktladungsproblems"
[Wahl $f(x) = \text{Punktladung am Ort } x']$
- Die Methode liefert die Lösung \forall Ladungsdichte

- betrachte wieder Volumen V begrenzt von geschlossener Fläche S

- unser Diff. Operator $D = \vec{\nabla}^2$

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}) \Rightarrow G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

mit $\vec{\nabla}^2 F = 0$ in V

Dann Suchen $\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \underbrace{-4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')}_{\text{Konvention}}$

- die Funktion F muß so gewählt werden, daß die Randbedingungen auf S erfüllt sind
- die Bestimmung von F ist dann das eigentliche Problem
- man kann zeigen $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$
bzw. $F(\vec{x}, \vec{x}') = F(\vec{x}', \vec{x})$

Interpretation: \rightarrow in Abschnitt 2.12

$\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} F$ ist das Potential einer (fiktiven) Ladungsverteilung außerhalb von V

\rightarrow die wird so gewählt, daß die Randbedingungen auf S erfüllt sind, wenn zusätzlich am Ort \vec{x}' (in V) eine Punktladung ist (Term $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$)

\rightarrow deswegen muß F auch von \vec{x} abhängen

Auf diese Interpretation beruht die Methode der Spiegelladung (nächster Abschnitt)

Randbedingungen für G

- brauchen eine Lösung für Φ mit Dirichlet/Neumann RB
- was verlangen wir von G ?
- wie sieht die Lösung $\Phi = \dots$ aus?

Trick:

betrachte Greenscher Satz mit $u = \Phi$ und $v = G$

verlange $\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[\Phi(\vec{x}') \vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}') \right] =$$

$$= -\Phi(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\tau' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')$$

$$\stackrel{\text{G.S.}}{=} \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \Phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right]$$

dies liefert eine "Lösung" für Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\tau' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \left[\Phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} - G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \Phi(\vec{x}')}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (*)$$

Problem: Φ steht auf der R.H.S.

Idee: unsere Identität wird zur die Lösung falls die auftretenden Φ (auf R.H.S) durch die RB bestimmt sind

Fall 1 Dirichlet RB: nur $\Phi|_S$ darf beitragen

! verlange $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ für \vec{x}' auf S

Dann

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\tau' \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \Phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'}$$

ist die Lösung mit richtigen RB

Allgemeine Lösung von $D\gamma(x) = f(x) :$

$$\gamma(x) = \int dx' f(x') G(x, x') + g(x) \quad \text{mit } Dg(x) = 0 \quad \forall g,$$

Wahl von $g(x) \Leftarrow$ Randbedingungen

In unserem Fall

$$\vec{\nabla}^2 \oint_S dA' \Phi(x') \frac{\partial G}{\partial n'}(x, x') = \oint_S dA' \Phi(x') \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'}}_{\text{In } V} \underbrace{\delta(x-x')}_{\text{Auf } S} = 0$$

Fall 2: Neumann RB : Φ sollte nicht beitragen auf r.h.s.

naiv : $\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = 0 \quad \text{für } \vec{x}' \text{ auf } S \quad (*)$

geht leider nicht: Gaußscher Satz angewendet auf $\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ liefert

$$\oint_S dA' \frac{\partial G}{\partial n'} = -4\pi$$

d.h. (*) läßt sich nicht erfüllen

Alternative: $\frac{\partial G_N(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{A} \quad (A = \text{Flächeninhalt von } S)$

Damit

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\tau' \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N + \langle \Phi \rangle_S$$

mit

$$\langle \Phi \rangle_S = \frac{1}{A} \oint_S dA' \Phi(\vec{x}') = \text{Mittelwert von } \Phi \text{ auf } S$$

Zsf.: RB für G_D und G_N sind recht einfach.
Trotzdem ist exakte Lösung selten möglich

2.12) RW-Probleme III: Methode der Spiegelladung 35

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

Interpretation \leftrightarrow siehe S. 32 (Insert here!)

Idee: unter Ausnutzung der Symmetrien kann man ^{manchmal die} geeignete Ladungen (Spiegel- oder Bildladungen) leicht finden

N.B.: ursprüngl. RW-Problem ersetzt durch äquivalentes Problem

- mit erweitertem Raumgebiet
- mit zusätzl. (Spiegel-) Ladungen
- ohne Randfläche

Bsp. 1: Punktladung vor ebener, geerdeter Metallfläche (yz-Ebene)

- auf der Fläche ist $\Phi = \text{const} = 0$ (Dirichlet)
- die Lösung ist offensichtlich:



$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - a\hat{x}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{|\vec{x} + a\hat{x}|}$$

$$\Phi(\vec{x}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} = (0, y, z) \quad (\text{auf yz-Ebene})$$

Die Ladung $q' = -q$ existiert natürlich nicht wirklich, statt dessen wird auf der Metallfläche eine Flächenladungsdichte induziert:

nutze:

- 1) $\vec{\nabla} \Phi$ zeigt in \hat{x} -Richtung (da $\Phi = \text{const}$ auf yz-Ebene)
- 2) $\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

Dann

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \int \rho dx = -\epsilon_0 \int \nabla^2 \Phi dx = -\epsilon_0 \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = \\
 &= -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0+} \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right]_{x=0} \\
 &= -\frac{qa}{2\pi (a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

- wird maximal für $y=z=0$, also nahe der Punktladung ^(q)
- radialsymmetrisch in der yz -Ebene (hängt nur von $\sqrt{y^2+z^2}$ ab)
- gesamte induzierte Ladung

$$\int_S \sigma dy dz = -q = \text{Spiegelldung}$$

wie erwartet vom Gaußschen Gesetz

Diese Ladung fließt über die Erdung auf die Metallplatte

Bsp. 2: Punktladung vor geerdeter Metallkugel

d.h. $V = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Kugel}$, $V' = \text{Kugel}$
 $S = \text{Oberfläche der Kugel}$
 Kugelradius = a

Punktladung q am \vec{y} ($|\vec{y}| > a$)

Annahme:

Spiegelldung q' am \vec{y}' ($|\vec{y}'| < a$)

Potential

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{y}'|}$$

Verlangen:

$$\Phi(|\vec{x}|=a) = 0 \Rightarrow q' = ?, \vec{y}' = ?$$

Symmetrie: q' muß auf Linie zw. q und Ursprung liegen

Sei $\hat{n}_x \equiv \hat{x}$ Einheitsvektor in Richtung \vec{x}
 $\hat{n}_y \equiv \hat{y}$ Einheitsvektor in Richtung \vec{y}

d.h. $\vec{x} = x \hat{n}_x$, $\vec{y} = y \hat{n}_y$, $\vec{y}' = y' \hat{n}_y$
 (Note: \hat{n}_y is shared between \vec{y} and \vec{y}' , indicated by an arrow labeled "gleich")

Dann

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(|\vec{x}|=a) = \frac{q}{|a\hat{n}_x - y\hat{n}_y|} + \frac{q'}{|a\hat{n}_x - y'\hat{n}_y|} \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{q}{a|\hat{n}_x - \frac{y}{a}\hat{n}_y|} + \frac{q'}{y'|\frac{a}{y'}\hat{n}_x - \hat{n}_y|}$$

$$(\hat{n}_x - \frac{y}{a}\hat{n}_y)^2 = 1 - 2\frac{y}{a}\hat{n}_x \cdot \hat{n}_y + \frac{y^2}{a^2}$$

$$(\hat{n}_y - \frac{a}{y'}\hat{n}_x)^2 = 1 - 2\frac{a}{y'}\hat{n}_y \cdot \hat{n}_x + \frac{a^2}{y'^2}$$

\rightarrow verlange $\frac{y}{a} = \frac{a}{y'}$ und $\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'}$

\rightarrow Lösung $\boxed{y' = \frac{a^2}{y} \quad q' = -\frac{a}{y} q}$

Die Ladung q' fließt über die Erdung auf die Kugel

\Rightarrow Auf die Punktladung q wirkt eine Kraft: (Anziehend)

Abstand $r = y - y' = y(1 - a^2/y^2)$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qq'|}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{y^3(1 - a^2/y^2)^2} = \begin{cases} \sim \frac{1}{r^2} & y \rightarrow a \\ \sim \frac{1}{r^3} & y \gg a \end{cases}$$

Die Spiegelladung q' existiert natürlich nicht, statt dessen wird auf der Oberfläche S eine Flächenladungsdichte induziert

$$\sigma = \int \rho dx = -\epsilon_0 \int \vec{\nabla}^2 \Phi dx = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=a}$$

Gesamte induzierte Ladung

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{q}{\epsilon_0} = q' \quad (\text{Gauß})$$

N.B. Für große Abstände, $x \gg a$, \vec{E} sieht aus wie das Feld einer Ladung $q+q' = q(1-\frac{a}{x})$ (+ höhere Terme in $1/x$, siehe Multipolenentwicklung)

Bsp. 3 Punktladung und isolierte, geladene Metallkugel

Was hat sich geändert?

Randbedingungen $\Phi|_S = 0$ (geerdet)

$\Rightarrow \Phi|_S = \text{const} \neq 0$ (isoliert, Metall)

Sei Q : die Ladung des Kugels

Lösung:

Schritt 1: zunächst sei Kugel geerdet \rightarrow Bsp 2
 \rightarrow induzierte Ladung $q' = -aq/\gamma$

Schritt 2: unterbreche Erdung und bringe zusätzl. Ladung $Q-q'$ auf Kugel

Dann

- Gesamtladung Q , wie erwünscht
- Zusatzladung $Q-q'$ gleichmässig auf Oberfläche verteilt, da Kräfte durch Punktladung q bereits durch q' ausgeglichen sind

\Rightarrow

Potential für \vec{x} außerhalb der Kugel

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{x}-\vec{y}'|} + \frac{Q-q'}{|\vec{x}|} \right]$$

mit q', \vec{y}' wie in Bsp. 2

- Greensche Funktion $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ ^{der Kugel} ist gerade die Lösung von Bsp. 2 (geerdete Kugel) mit Einheitsladung $q=1$ und ohne $1/4\pi\epsilon_0$. Auch Ord der Punktladung $\vec{y} \rightarrow \vec{x}'$

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a}{x' |\vec{x} - \frac{a^2}{x'^2} \vec{x}'|} ; x' \equiv |\vec{x}'|$$

Zweiter Term entspricht der Funktion F

[Dirichlet Randbedingung $G_D(\vec{x}, \vec{x}')|_S = 0 \Leftrightarrow$ geerdete Oberfläche]

wichtig: G ist bestimmt ^{nur} durch Geometrie des Randes

für beide Bsp. 2 und Bsp. 3 können wir $\Phi(\vec{x})$ finden für beliebige Ladungsdichte $\rho(x)$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\tau' \rho(x') G_D(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \Phi(x') \frac{\partial G_D}{\partial n'}$$

Der Unterschied zw. Bsp. 2 und Bsp. 3 liegt in dem 2. Term

[für Bsp. 3 müssen aber noch $\Phi(|\vec{x}'|=a)$ bestimmen $\leftarrow Q$]

2.13

RW-Probleme IV: Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

2.13.1

Orthogonale Funktionen

Vektorraum V der Dimension n :

- aufgespannt durch n Einheitsvektoren \hat{e}_i mit $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$
- jeder Vektor in V kann als Linearkombination der \hat{e}_i dargestellt werden:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n c_i \hat{e}_i$$

- Koeffizienten eindeutig bestimmt

$$c_i = \vec{v} \cdot \hat{e}_i \quad \uparrow \quad \text{Skalarprodukt}$$

Analog gibt es Funktionenräume

- Funktionen definiert im Intervall $[a, b]$ ($a, b \rightarrow \infty$ auch)
- reelle Gewichtsfunktion
- Funktionen sind quadratintegrabel ($\in L_2$)

$$f \in L_2 \Leftrightarrow \int_a^b dx \, \omega(x) |f(x)|^2 \text{ existiert und ist endlich}$$

- Skalarprodukt:

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_a^b dx \, \omega(x) f_1^*(x) f_2(x)$$

N.B. $\langle f_1 | f_2 \rangle^* \stackrel{\omega \text{ reell}}{=} \langle f_2 | f_1 \rangle$

- Einheitsvektoren:

ein System orthonormaler Funktionen $U_i(x)$

$$\langle U_i | U_j \rangle = \delta_{ij}$$

- das System der U_i heißt vollständig, falls $\forall f \in L_2$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x) \quad \text{mit} \quad a_i = \langle U_i | f \rangle$$

genauer:

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n > N \int_a^b dx \, \omega(x) \left| f(x) - \sum_{i=1}^n a_i U_i(x) \right|^2 < \varepsilon$$

- Vollständigkeitsrelation:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle U_i | f \rangle U_i(x) = \int_a^b dx' \left[\omega(x') \sum_{i=1}^{\infty} U_i^*(x') U_i(x) \right] f(x')$$

damit

$$\omega(x') \sum_{i=1}^{\infty} U_i^*(x') U_i(x) = \delta(x-x')$$

Bsp. 2: trigonometrische Funktionen

$$[a, b] \rightarrow [-\pi, \pi] \quad \omega(x) = \frac{1}{\pi}$$

Einheitsfunktionen:

$$U_0 = \frac{1}{2}; \quad U_n = \sin(nx) \quad \text{und} \quad \cos(nx) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)]$$

mit

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx), \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx)$$

Alternative (Verallgemeinerung)

$$U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i2\pi m x/a} \quad \text{im Intervall } (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}), \quad \omega(x) = 1$$

Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{i2\pi m x/a} \quad \text{mit} \quad A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} dx f(x) e^{-i2\pi m x/a}$$

minus!
 $U_m^*(x)$

nun $a \rightarrow \infty$ und $\frac{2\pi m}{a} = k$

$$\sum_m \rightarrow \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad (dk = \frac{2\pi}{a} \text{ wird sehr klein})$$

$$A_m \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k)$$

$$U_m(x) \rightarrow U_k(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ikx}$$

Dann

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx} \Rightarrow \text{"a" tritt nicht bei} \Rightarrow \text{umdefin.: } U_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

mit

$$A(k) = \langle U_k | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

Orthogonalitätsbedingung für die $U_k(x)$

$$\langle U_{k'} | U_k \rangle \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} = \delta(k-k')$$

Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x-x')$$

Bsp. 2 Orthogonale Polynome $P_n(x)$

- vollständig bestimmt durch $[a, b]$, $w(x)$ sowie die Forderung $U_n = \text{Polynom}$

Einfachste Legendre-Polynome:

$$[a, b] = [-1, 1], \quad w(x) = 1$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{u.s.w.}$$

$$2^n n! P_n(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n [(x^2 - 1)^n]$$

es gibt viele andere

- all dies kann auf mehrere Variablen verallgemeinert werden

2.13.2 Variablenseparation in kartesischen Koordinaten

- Eine der wichtigsten Methoden, partielle Gl. zu lösen
- Wir interessieren uns speziell in der Laplace-Gl.

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Produktansatz: Suche Lösungen spez. Art:

$$\Phi(x, y, z) = \underline{X}(x) \underline{Y}(y) \underline{Z}(z)$$

Dann

$$\frac{d^2 \underline{X}}{dx^2} \underline{Y} \underline{Z} + \underline{X} \frac{d^2 \underline{Y}}{dy^2} \underline{Z} + \underline{X} \underline{Y} \frac{d^2 \underline{Z}}{dz^2} = 0$$

 $| \cdot \underline{X} \underline{Y} \underline{Z} :$

$$\frac{1}{\underline{X}} \frac{d^2 \underline{X}}{dx^2} + \frac{1}{\underline{Y}} \frac{d^2 \underline{Y}}{dy^2} + \frac{1}{\underline{Z}} \frac{d^2 \underline{Z}}{dz^2} = 0$$

oder

$$\frac{1}{\underline{X}(x)} \frac{d^2 \underline{X}}{dx^2} = - \frac{1}{\underline{Y}(y)} \frac{d^2 \underline{Y}}{dy^2} - \frac{1}{\underline{Z}(z)} \frac{d^2 \underline{Z}}{dz^2}$$

linke Seite hängt nur von x abrechte Seite hängt nur von y, z ab \rightarrow l. S. = const, sonst Widerspruch

damit

$$\frac{1}{\underline{X}(x)} \frac{d^2 \underline{X}}{dx^2} = -d^2$$

$$\rightarrow \underline{X}(x) = e^{\pm idx}$$

[oder $\sin(dx)$, $\cos(dx)$]

$$\frac{1}{\underline{Y}(y)} \frac{d^2 \underline{Y}}{dy^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{\underline{Z}(z)} \frac{d^2 \underline{Z}}{dz^2} = d^2 + \beta^2$$

$$\rightarrow \Phi_{d\beta}(x, y, z) = e^{\pm idx} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{d^2 + \beta^2} z}$$

ist eine (der vielen!) Lösungen

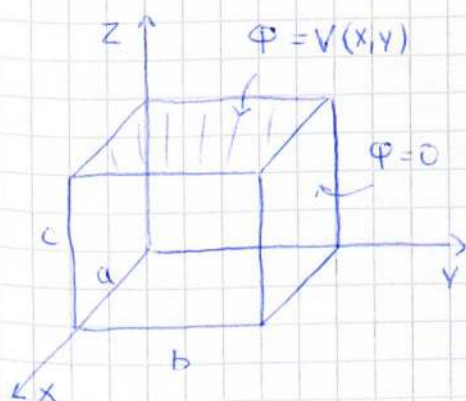
L10/12.11

✓ Lineare Superposition der Lösungen ist eine Lösung

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{d\beta} c_{d\beta} \Phi_{d\beta}(x, y, z)$$

- dies ist kein Produkt mehr, sondern eine ziemlich alty Funktion
- die erlaubten Werte für d, β und die Koeffizienten $c_{d\beta}$ sind durch die RB bestimmt

Bsp: Quader mit Kantenlängen a, b, c ; Oberseite auf Potential $V(x, y)$, die anderen 5 Seiten auf Potential 0

Was ist Φ innerhalb des Quaders?

Ausnutzen:

$$1) \Phi = 0 \text{ für } x=0 \text{ oder } y=0 \text{ oder } z=0$$

$$X = \sin(dx)$$

$$Y = \sin(\beta y)$$

$$Z = \frac{1}{2} \left[e^{\sqrt{d^2 + \beta^2} z} - e^{-\sqrt{d^2 + \beta^2} z} \right] = \sinh(\sqrt{d^2 + \beta^2} z)$$

$$2) \Phi = 0 \text{ bei } x=a \text{ oder } y=b$$

$$\Rightarrow da = n\pi, \quad \beta b = m\pi$$

$$\text{Sei } d_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma_{mn} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$