Literatur

J. D. Jackson	"Klassische Elektrodynamik"
Fließbach	"Elektrodynamik"
Nolting	Grundkurs theor. Physik 3: Elektodynamik
Landau, Lifschitz	

Fourier-Reihe und Fouriertransformation.

Lang, Pucker	Mathematische Methoden in der Physik Abschnitt 13.5, pp. 413-418 14.3, pp. 427-431
A. Deitmar	A first course in harmonic analysis Part I: pp. 3-70

0. Einleitung

- klassische Elektrodynamik
- vollständig beschrieben durch Maxwell-Gl. (in SI-Einheiten)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

ρ = Ladungsdichte , $\vec{J}$ = Stromdichte
$\vec{E}$ = elektrisches Feld
$\vec{B}$ = magn. Flussdichte oder Induktion oder Feld

$\vec{D}$ = dielektrische Verschiebung $= \varepsilon_0 \vec{E}$ im Vakuum
$\vec{H}$ = magnetisches Feld $= \vec{B}/\mu_0$ im Vakuum

Geschwindigkeit des Lichts (im Vakuum, in SI)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2 ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s (exakt!)}$$

(fundamentale Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$)

- viele Phänomene des täglichen Lebens und Industrielle Anwendungen
- zur Geschichte:

  E. Whittaker "A history of the theories of aether and electricity" (Dover, 1990)

- warum noch einmal ED?

  Theoretischer Zugang + mathematische Methoden

Aus heutiger Sicht:

- Maxwell-Gl. vereinheitlichen Elektrizität und Magnetismus
- Quellen (Ladungen) + Felder

  Felder können in Raumgebieten existieren, in denen keine Quellen sind

  z.B. EM Wellen (im Vakuum)

- Symmetien:

  Lorentz -> Spez. Relativitätstheorie

  Eichinvarianz -> Grundleg. Prinzip in "das Standartmodell" - alle Wechselwirkungen in der Natur

- klass. E-dynamik + Quantenmechanik =>

  => Quantenelektrodynamik "Mustertheorie"

Einheiten

- unnötige Verwirrung durch viele Einheitensysteme
- unterscheiden sich durch 4 Konstanten (2 unabhängig)

$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2}$ Kraft zw. zwei Ladungen

$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d}$ Kraft zw. zwei Drähten

$B = 2k_2 \alpha \frac{I}{d}$ magn. Feld des Drahtes

$\vec{\nabla} \times \vec{E} + k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ Induktionsgesetz

Es gilt

$$k_1 = k_2 \cdot c^2$$

$$\alpha = 1/k_3 \quad \text{(Galilei- Inv)}$$

Einheitensystem	k_1	k_2	α	k_3
SI ($\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$)	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	1	1
Gauß (cgs)	1	$\frac{1}{c^2}$	c	$\frac{1}{c}$
Heaviside- Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	c	$\frac{1}{c}$
elektrostat. Einheiten (esE)	1	$\frac{1}{c^2}$	1	1
elektromag. Einheiten (emE)	c^2	1	1	1

Maxwell-Gl. im Vakuum:

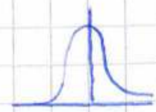
$$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi k_2 \rho \qquad \vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{k_3 c^2}\frac{\partial \vec E}{\partial t} = 4\pi \frac{k_1}{k_3 c^2}\vec J$$
$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec E + k_3\frac{\partial \vec B}{\partial t} = 0$$

- wir werden SI-Einheiten benutzen (Anwendungen)
- Theoretische Physik $\leftrightarrow$ Heaviside-Lorentz mit $c = 1$

Kapitel I: Mathematische Hilfsmittel

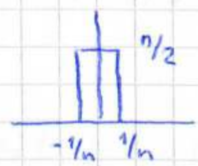
1.1 Diracsche Delta-Funktion

Ladungsdichte $\rho(\vec x)$ $\qquad q = \int d^3x\, \rho(x)$



Punktladung (Beispiel: 1-Dimension)

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}; & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\forall n \quad \text{Ladung} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho_n(x) = 1$$

$$\rho_{Punkt}(x) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(x)$$ - existiert nicht (∞ am Ursprung)

aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho_n(x) = 1$$

- eine neue mathematische Struktur -
  - keine Funktion, sondern <u>Distribution</u>

  nur unter dem Integral sinnvoll

Def.:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\,\delta(x) = f(0) \qquad \text{für "brave" } f(x)$$

kann als Limes einer Folge von Funktionen definiert werden

Beispiele

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2} \qquad \text{u.s.w}$$

$\lim_{n \to \infty} \delta_n(x)$ existiert nicht! $\quad (:= \delta(x))$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

<u>Eigenschaften</u>

① $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a)$$

② Ableitung: $\int f(x)\, \delta'(x-a)\, dx \overset{\text{partielle Int}}{=} - \int f'(x)\, \delta(x-a)\, dx = -f'(a)$

③ wenn $g(x)$ nur einfache Nullstellen hat:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i,\, g(x_i)=0} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Beispiele:

$$\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$$

$$\delta(x^2-1) = \frac{1}{2}\left[\delta(1-x) + \delta(1+x)\right]$$

④ Integral:

$$\int_{-\infty}^{a} \delta(x)\, dx = \theta(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases} \quad (\text{Stufenfunktion})$$

⑤ In 3d kartesischen Koordinaten

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\, \delta(x_2)\, \delta(x_3)$$

daraus folgt

$$\int_{\Delta V} d^3x' \, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,') = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \Delta V \text{ den Punkt } \vec{x} \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

⑥ In krummlinigen Koordinaten

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \qquad d^3x = \underbrace{J(x_i, \xi_i)}_{\text{Jacobi Determinante}} d^3\xi$$

$$\rightarrow \quad \delta(\vec{x}) = \frac{1}{|J(x_i, \xi_j)|} \delta(\xi_1)\,\delta(\xi_2)\,\delta(\xi_3)$$

⑦ Dimension der δ-Funktion = inverses Volumen

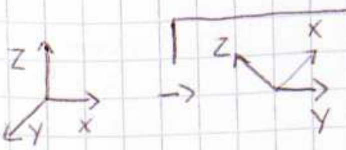
⑧ Ladungsdichte für eine diskrete Anordnung von Punktladungen

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i \, \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$$

1.2 Vektorfelder und Differentialoperatoren

Skalar-, Vektor-, Tensor-Objekte unterscheiden sich über das Verhalten unter Koordinatentransformationen

Ortsvektor $\quad \vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ("x" "y" "z") $\rightarrow \vec{x}\,' = \{x_1', x_2', x_3'\}$



[oder $\vec{r} = \{x, y, z\}$]

in kartesischen Koordinaten: Transformation ist Rotation (plus evtl. Spiegelung und/oder Translation)

$$\vec{x}\,' = R\,\vec{x} \quad \text{mit } R = R(\underset{\uparrow}{\theta, \varphi}) \text{ orthogonal } (R^{-1} = R^T)$$

Euler Winkeln

oder $\quad x'^i = R^{ij} x^j \qquad (R^{-1})^{ij} = R^{ji}$

oder $\quad dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \equiv \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$ (Summe über doppelte Indizes)

$$R^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = (R^{-1})^{ji} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

Skalarfeld

- jedem Punkt des Raumes $\mathbb{R}^3$ wird eine Zahl zugeordnet: $\varphi(\vec{x})$
- invariant unter Koordinatentransformationen

$$\varphi(\vec{x}\,') = \varphi(\vec{x}) \quad , \quad \vec{x}\,' = R\vec{x}$$

- Bsp: Temperatur, Dichte, Luftdruck

Vektorfeld

- Objekt mit 3 Komponenten $\vec{A}(\vec{x}) = \{A_1(\vec{x}), A_2(\vec{x}), A_3(\vec{x})\}$
- Transformiert sich wie Ortsvektor

$$\vec{A}\,'(\vec{x}\,') = R\vec{A}(\vec{x})$$

Bsp: $\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \right\} \equiv \vec{\nabla}\varphi$ ist ein Vektor:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x_i'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}}_{=(R^{-1})^T} = \underbrace{\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}}_{=(R)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

Vektordifferentialoperator "Nabla"

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Dieser Operator kann nun auf Skalar und Vektorfelder angewandt werden

Gradient

$\vec{\nabla}$ angewendet auf eine skalare Funktion $\varphi(x,y,z)$ ergibt einen Vektor

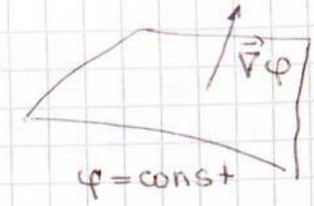
$$\text{grad}\,\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi \qquad \text{gradient von } \varphi$$

- wenn Position sich um $d\vec{r}$ ändert, ändert sich φ um

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \equiv (\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{r}$$

Skalarprodukt

- auf einer Fläche mit $\varphi(x,y,z) = \text{const}$ $\quad d\varphi = 0$



  $\rightarrow$ $\vec{\nabla}\varphi \perp d\vec{r}$

  $\rightarrow$ $\vec{\nabla}\varphi$ senkrecht zur Fläche $\varphi = \text{const}$

- für festen $|d\vec{r}|$ wird $d\varphi = \nabla\varphi \cdot dr$ maximal, wenn $\vec{\nabla}\varphi \parallel d\vec{r}$

  $\rightarrow$ Richtung von $\vec{\nabla}\varphi \triangleq$ größte Änderungsrate von φ

- Bsp: $\qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{e}_x + \frac{y}{r}\vec{e}_y + \frac{z}{r}\vec{e}_z\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Divergenz

Skalarprodukt von $\vec{\nabla}$ mit einem Vektor ergibt einen Skalar

$$\operatorname{div}\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \text{Divergenz von } \vec{V}$$

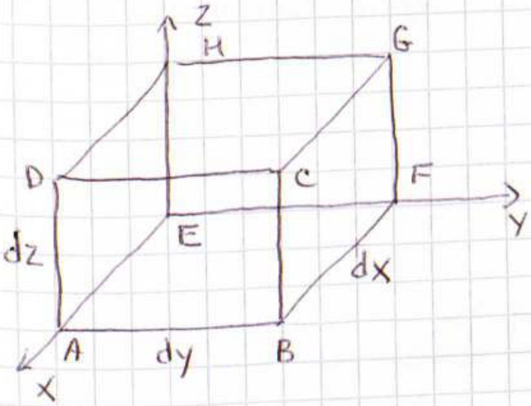
- Produktregel

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{V}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{V} + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

- Bsp. zur phys. Bedeutung:

  betrachte kompressible Flüssigkeit mit dichte $\rho(x,y,z)$ und Geschwindigkeit $\vec{v}(x,y,z)$

  Wieviel Materie fließt pro Volumen- und Zeiteinheit aus einem Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz$?



- Flußrate in das Volumen durch EFGH ($+x$ Richtung)

$$= \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}} = (\rho v_x)\big|_{x=0}\,dy\,dz$$

- Flußrate aus dem Volumen durch ABCD ($+x$ Richtung)

$$= (\rho v_x)\big|_{x=dx}\,dy\,dz =$$
$$= \left[(\rho v_x)\big|_{x=0} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx + O(dx^2)\right]dy\,dz$$

$\rightarrow$ Nettofluß aus dV in $+x$ Richtung

$$= \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

$\rightarrow$ Nettofluß aus dV

$$= \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dV = \vec{\nabla}\cdot(\rho v)\, dV = -\frac{\partial m}{\partial t}$$
$$= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV$$

$\rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v}) = 0$$

(Fluß aus Volumen heraus $\rightarrow$ geringere Dichte und umgekehrt)

Rotation

- Vektorprodukt: (Kreuzprodukt)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$
$$C_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l$$

- ε_{ikl} - antisymmetrische Tensor:

Def.: $\varepsilon_{ikl} = -\varepsilon_{ilk} = -\varepsilon_{lki} = -\varepsilon_{kil}$

$\varepsilon_{123} = 1$

Eigenschaften:

- $\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{iki} = \varepsilon_{kii} = 0$ (zwei gleichen Indizes) keine Summe!

- Summen:

$$\varepsilon_{ikl}\, \varepsilon_{ikl} = 6$$
$$\varepsilon_{ikl}\, \varepsilon_{ikl'} = 2\delta_{ll'}$$
$$\varepsilon_{ikl}\, \varepsilon_{ik'l'} = \delta_{kk'}\delta_{ll'} - \delta_{kl'}\delta_{lk'}$$
$$\varepsilon_{ikl}\, \varepsilon_{i'k'l'} = \begin{vmatrix} \delta_{ii'} & \delta_{ik'} & \delta_{il'} \\ \delta_{ki'} & \delta_{kk'} & \delta_{kl'} \\ \delta_{li'} & \delta_{lk'} & \delta_{ll'} \end{vmatrix}$$

- Bsp.:

$$\vec{D} = \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$$

$$D_i = \varepsilon_{ikl} A_k (B \times C)_l = \varepsilon_{ikl} A_k \varepsilon_{lmn} B_m C_n =$$
$$= \varepsilon_{lik} \varepsilon_{lmn} A_k B_m C_n = (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}) A_k B_m C_n$$
$$= B_i A_k C_k - C_i A_k B_k$$

$$\rightarrow \quad \vec{D} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

- Kreuzprodukt von $\vec{\nabla}$ mit einem Vektor ergibt einen Vektor

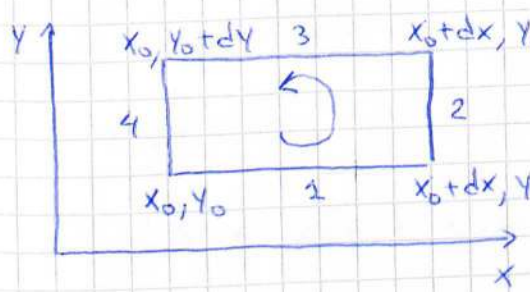
$$\text{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \qquad \text{Rotation von } \vec{V}$$

- Produktregel

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{V}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{V} + f\,\vec{\nabla} \times \vec{V}$$

- Bsp. zur phys. Bedeutung:

betrachte rotierende Flüssigkeit in xy- Ebene



$$\text{Zirkulation} = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(Linienintegral wird später definiert}$$

$$= \int_1 v_x(x,y)\,dl_x + \int_2 v_y(x,y)\,dl_y + \int_3 v_x(x,y)\,dl_x$$
$$+ \int_4 v_y(x,y)\,dl_y$$
$$= v_x(x_0,y_0)\,dx + \left[v_y(x_0 y_0) + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right]dy$$
$$+ \left[v_x(x_0 y_0) + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy\right](-dx) + v_y(x_0,y_0)(-dy)$$
$$= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx\,dy = (\vec{\nabla}\times\vec{v})_z\,dS$$

$\rightarrow$ Wirbeldichte (pro Flächeneinheit) $= \vec{\nabla}\times\vec{v}\,\big|_z$

Laplace Operator

Divergenz des Gradienten

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{\nabla}^2\varphi \equiv \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Wiederholte Anwendung von $\vec{\nabla}$:

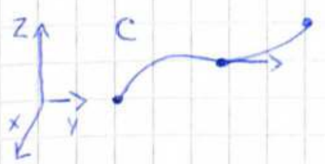
Viele Möglichkeiten, z.B

- $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \vec{\nabla}^2\vec{V}$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$
- $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$ (Ü-Blatt 1)

1.3 Linien-, Flächen- und Volumenintegrale (in 3d)

Linienintegrale

$\hat{x} \equiv \vec{e}_x$



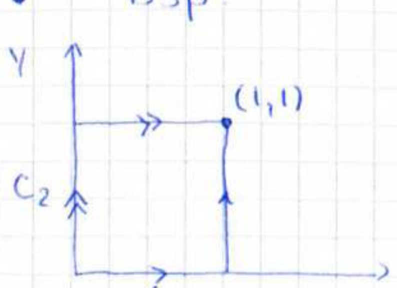
- Längenelement $d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$
- Drei Möglichkeiten

$$\int_C \varphi\, d\vec{r}, \quad \int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} \quad \int_C \vec{V}\times d\vec{r}$$

- C ist eine Kontour (offen oder geschlossen)

$$\int_C d\vec{r} = \text{Länge von } C$$

- C muß angegeben werden. (das Ergebnis hängt von C ab)
- Entwicklung in $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ → Einfache Integrale
- Bsp



Arbeit $W = \int_C \overrightarrow{\text{Kraft}}\cdot d\vec{r}$, $\text{Kraft} = F$

Sei

$$\vec{F} = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y}$$

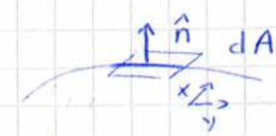
$$\rightarrow \quad W = -\int^{1} \underset{y(x)}{y}\,dx + \int^{1} \underset{x(y)}{x}\,dy$$

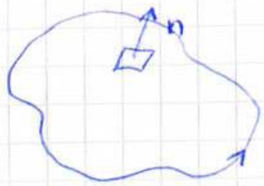
$$C_1: \quad W_1 = 0 + \int_0^1 dy = 1$$
$$C_2: \quad W_2 = -\int_0^1 dx + 0 = -1$$

→ Arbeit hängt von dem Weg ab

Flächenintegrale:

Flächenelement $d\vec{\sigma} = \hat{n}\, dA$





- S geschlossen: $n \perp S$ und nach außen
- S offen: rechte-Hand Regel

  (Daumen $= \hat{n}$, gekrümmte Finger = Richtung des Umfangs)

- Drei Möglichkeiten

$$\int_S \varphi\, d\vec{\sigma} \quad ; \quad \int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \quad ; \quad \int_S \vec{V} \times d\vec{\sigma}$$

- Entwicklung in Komponenten → Doppelintegrale
- $\int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$ = Fluß durch die Fläche

  (siehe Bsp. zur Divergenz)

Volumenintegrale

Volumenelement $d\tau = dx\, dy\, dz$ ist ein Skalar

z. B $$\int_V \vec{V}\, d\tau = \hat{x} \int_V V_x\, d\tau + \hat{y} \int_V V_y\, d\tau + \hat{z} \int_V V_z\, d\tau$$

1.4 Integralsätze

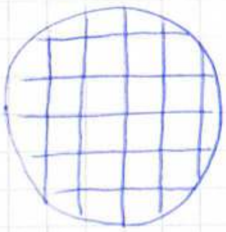
Gaußscher Integralsatz:

$$\boxed{\int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\, d\tau}$$ (S = geschlossene Oberfläche des Volumens V)

[dies ist veralgem. von $\quad f(b) - f(a) = \int_a^b dx \frac{df}{dx}$]

$\overset{a}{\bullet}$———$\overset{b}{\bullet}$

Beweis: zerlege V in kleine Quader

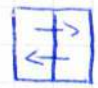


für diese gilt

$$\sum_{6 \text{ Oberflächen}} \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, d\tau$$

(siehe Bsp. zur Divergenz: Herleitung der Kont.-Gl. mit $\rho \vec{v} \to \vec{V}$)

Σ:



linke Seite: innere Oberflächen heben sich weg

nur äußere Oberfläche trägt bei

rechte Seite: Teilvolumina addieren sich

Andere Formen

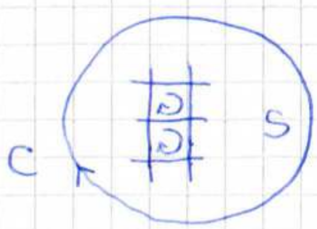
$$\int_S \varphi \, d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \varphi \, d\tau \qquad (\vec{V} = \varphi \hat{a} \text{ mit } \hat{a} \text{ \underline{beliebig} const})$$

$$\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{P} = \int_V \vec{\nabla} \times \vec{P} \, d\tau \qquad (\vec{V} = \hat{a} \times \vec{P} \text{ mit } \hat{a} \text{ \underline{beliebig} const})$$

<u>Stokesscher Integralsatz</u>

$$\boxed{\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}} \qquad (C = \text{geschlossener Umfang der Fläche } S)$$

(rechte-Hand-Regel legt das Vorzeichen fest)



Beweis zerlege S in kleine Parallelogramme

für diese gilt

$$\sum_{4 \text{ Seiten}} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$$

(siehe Bsp zur Rotation:

Wirbeldichte pro Flächeneinheit)

Σ: $\boxed{\uparrow | \downarrow}$

linke Seite: innere Seiten heben sich weg

Linienintegral entlang des Umfangs trägt bei

rechte Seite Teilflächen addieren sich

Andere Formen

$$\int_C \varphi \, d\vec{r} = \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}\varphi \qquad (\vec{V} = \varphi \hat{a} \text{ mit } \hat{a} \text{ beliebig const})$$

$$\int_C d\vec{r} \times \vec{P} = \int_S (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{P} \qquad (\vec{V} = \hat{a} \times \vec{P} \text{ mit } \hat{a} \text{ beliebig const})$$

Greensche Identitäten

für $\forall$ zwei skalare Funktionen u und v gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) = u \vec{\nabla}^2 v + (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v)$$
$$\vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} u) = v \vec{\nabla}^2 u + (\vec{\nabla} v)(\vec{\nabla} u)$$

- folgt aus erster Gl.:

$$\int_V \left(u \vec{\nabla}^2 v + (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) \right) d\tau = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} dA \qquad d\vec{\sigma} = \hat{n} \, dA$$

  - 1. Greensche Identität

- subtrahiere die beiden Gl., integriere über V und wende Gaußschen Satz an:

$$\int_V \left(u \vec{\nabla}^2 v - v \vec{\nabla} u \right) d\tau = \int_S (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma}$$
$$= \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dA$$

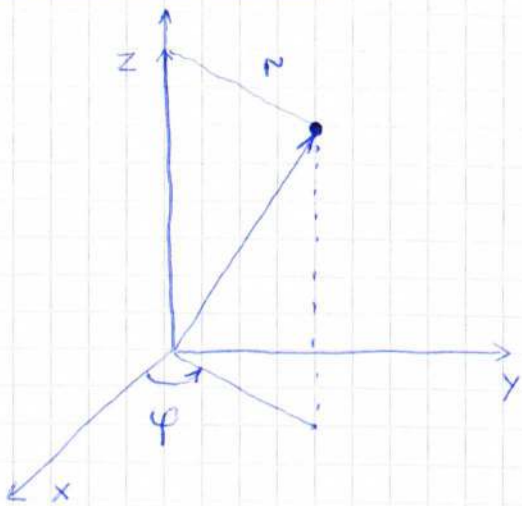
  - 2. Greensche Identität (oder Greenscher Satz)

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[u(\vec{x} + \varepsilon \hat{n}) - u(\vec{x}) \right]$$

(1.5) Krummlinige orthogonale Koordinatsysteme

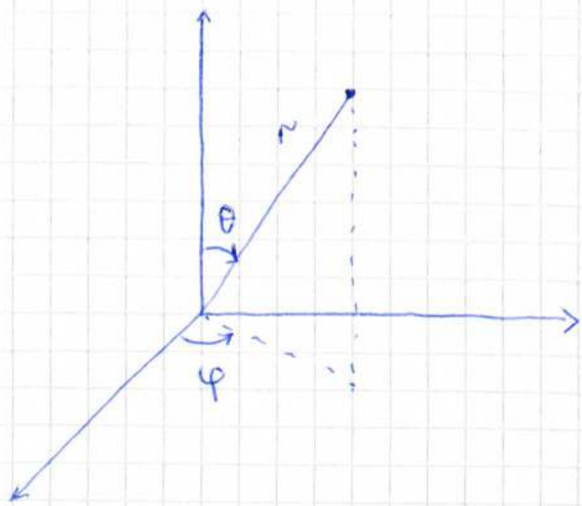
L4 27.10

Bsp **Zylinderkoordinaten**



$(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, z)$

Bsp **Kugelkoordinaten**



$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$

$x = r \sin\theta \cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$0 \le r \le \infty$
$y = r \sin\theta \sin\varphi$	$\cos\theta = \frac{z}{r}$	$0 \le \theta \le \pi$
$z = r \cos\varphi$	$\tan\varphi = \frac{y}{x}$	$0 \le \varphi \le 2\pi$

- Einheitsvektoren :

$$\hat{r} = \frac{\vec{\nabla} r}{|\vec{\nabla} r|} = \hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \frac{\vec{\nabla} \theta}{|\vec{\nabla} \theta|} = \hat{x} \cos\theta \cos\varphi + \hat{y} \cos\theta \sin\varphi - \hat{z} \sin\theta$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\vec{\nabla} \varphi}{|\vec{\nabla} \varphi|} = - \hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi$$

Orthogonalität: $\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = \hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\theta} = 0$

- Längenelement $\quad \vec{dr} = \hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r\,d\theta + \hat{\varphi}\,r\sin\theta\,d\varphi \quad$ *)
- Flächenelement $\perp \hat{r}$:

$$\rightarrow \quad dA = d\sigma_{\theta\varphi} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Raumwinkel $\quad d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

- Volumenelement

$$d\tau = r^2 dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = r^2 dr\,d\Omega$$

- Gradient

$$\vec{\nabla} f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

- Divergenz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\theta) + r\frac{\partial}{\partial\varphi}V_\varphi\right]$$

- Rotation

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta\,V_\varphi \end{vmatrix}$$

- Laplace-Operator

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]$$

*). quadrat. Längenelement

$$ds^2 = \vec{dr}\cdot\vec{dr} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 =$$

$$= 1\cdot(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2$$

Skalenfaktoren

Eine wichtige Identität

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{r})}$$

Herleitung:

$\triangleright$ für $\vec{r} \neq 0$ gilt

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = - \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = - \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} =$$
$$= 3 \frac{\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{3}{r^3} = 0$$

aber

für eine Kugel V mit Oberfläche S gilt (Gaußscher Satz)

$$\int_V \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} \, d\tau = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \, d\tau = - \int_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{\sigma} =$$
$$= - \int_S \frac{r^2 d\Omega}{r^2} = -4\pi$$

$\triangleleft$

1.6 Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz

Betrachte ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \int_V d\tau' \, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \, \vec{v}(\vec{x}') = - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \int_V d\tau' \, \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wende die Identität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times a) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a}$:

($\vec{a}$ ist das Integral)

$$\vec{v}(\vec{x}) = - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \int_V d\tau' \, \frac{\vec{v}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \int_V d\tau' \, \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

d.h. $\vec{v}(\vec{x})$ kann zerlegt werden in Gradienten eines Skalarfelds und Rotation eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(\vec{x}) = - \vec{\nabla} g(\vec{x}) + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}(\vec{x})$$

Umformungen:

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int_V d\tau' \, \frac{\vec{v}(x')}{|x - x'|} = \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[\vec{\nabla} \frac{1}{|x - x'|} \right] \cdot \vec{v}(\vec{x}')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[- \vec{\nabla}' \frac{1}{|x - x'|} \right] \cdot \vec{v}(x') \qquad \text{da } \vec{\nabla} f(x - x') = - \vec{\nabla}' f(x - x')$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{v}(x')}{|x - x'|} - \frac{1}{|x - x'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{v}(\vec{x}') \right] \qquad \text{Produktregel rückwärts}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \, \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_S d\vec{\sigma}' \cdot \frac{\vec{v}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \qquad \text{Gauß}$$

$$\omega(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_V d\tau' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[\vec{\nabla} \frac{1}{|x-x'|} \right] \times \vec{v}(x')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[- \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right] \times \vec{v}(\vec{x}')$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \left[\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{v}(x') \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d\tau' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_S d\vec{\sigma}' \times \frac{\vec{v}(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

d.h.

- $\vec{v}(x)$ ist eindeutig bestimmt durch

  1. seine Quellen $(\vec{\nabla}\, \vec{v})$ und Wirbel $(\vec{\nabla} \times \vec{v})$ im Inneren von V

und

  2. $\vec{v}$ auf der Oberfläche S von V

- Mit $V = \mathbb{R}^3$ und $|v(\vec{x})| \leq \frac{c}{|\vec{x}|^{1+\varepsilon}}$ für $|\vec{x}| \to \infty$ verschwinden die Oberflächenterme (und g, ω vereinfachen sich)

Wichtige Spezialfälle:

- falls $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad \to \quad \vec{v} = \vec{\nabla} g$
- falls $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \to \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$ mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$

  [folgt aus Def. ω wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \ \forall \vec{V}$]

Kapitel II Elektrostatik (im Vakuum)

2 Wiederholung + neue math. Methoden

2.1 Ladung und Ladungsdichte

- Punktladung: math. Idealisierung (δ- Funktion)
- Ladungsdichte: im Volumen ΔV befindet sich eine Ladung Δq

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \qquad \text{bzw.} \quad q = \int_V d^3x\, \rho(x)$$

- bereits erwähnt: