

## Elementare Zahlentheorie

## 4. Übungsblatt – 13. Mai 2020

**Aufgabe 1.** Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \geq 1$ . Zeigen Sie mithilfe der Primfaktorzerlegung:

$$ab = \text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b)$$

**Aufgabe 2.** In dieser Aufgabe bezeichnet  $n$  eine ganze Zahl.

- (a) Welche Reste können bei Division von  $n^2$  durch 4 auftreten?
- (b) Zeigen Sie, dass  $12|n^2(n^2 - 1)$ .

**Aufgabe 3.** Eine Primzahl  $p$  heisst *Germain-Primzahl*, falls  $2p + 1$  ebenfalls eine Primzahl ist. Sei  $p$  eine Germain-Primzahl. Zeigen Sie:

- (a)  $10 \nmid (p - 7)$ .
- (b) Falls  $p > 3$ , gilt  $6|(p - 5)$ .
- (c) Finden Sie alle Primzahlen auf diesem Übungsblatt, die keine Germain-Primzahlen sind. *Hinweis:* Es sind insgesamt 71 – 67.

**Aufgabe 4.** Die  $n$ -te *Mersenne-Zahl* ist definiert als  $M_n := 2^n - 1$ .

- (a) Berechnen Sie  $M_p$  für die ersten 4 Primzahlen  $p$ . Ist  $M_p$  prim?
- (b) Zeigen Sie, dass  $M_{11}$  keine Primzahl ist, indem Sie deren Primfaktorzerlegung bestimmen.
- (c) Zeigen Sie: Falls  $M_n$  eine Primzahl ist, so ist auch  $n$  prim.  
*Hinweis:* Zeigen Sie, dass aus  $k|n$  folgt  $M_k|M_n$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass zwischen  $n! + 2$  und  $n! + n$  keine Primzahlen liegen.

*Erinnerung:*  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .