Elementares mathematisches Handwerkszeug

Prof. Dr. Christoph Lehner

Wintersemester 2020/2021

Zusammenfassung

In diesem Vorkurs wird das elementare mathematische Handwerkszeug zur Vorbereitung der Vorlesung Mathematische Methoden wiederholt. Der Inhalt orientiert sich am Lehrplan Gymnasium Bayern (`http://www.gym8-lehrplan.bayern.de`).

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Zahlen

- Eine endliche Menge X, kann man durch Angabe aller Elemente x_i mit $i = 1, \ldots, n$ definieren

$$X \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} . \tag{1}$$

Wir verwenden das Symbol $\equiv$ oder auch $:=$ um eine Definition anzugeben. Die Reihenfolge der Elemente ist gleichgültig und Wiederholungen sind möglich.

- Ist x ein Element von X, schreiben wir $x \in X$. Ist x kein Element von X, so schreiben wir $x \notin X$.
- Hat man zwei Mengen X und Y und für alle $x \in X$ ist auch $x \in Y$, dann sagt man X ist eine Teilmenge von Y und schreibt $X \subseteq Y$.
- Ist $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$, dann ist $X = Y$, ansonsten $X \neq Y$. Die wiederholte Angaben eines Elementes, ist also irrelevant: $\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$.
- Ist $X \subseteq Y$ aber $X \neq Y$, dann sagt man X ist eine echte Teilmenge von Y und schreibt auch $X \subset Y$.
- Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X ohne Wiederholung wird auch Mächtigkeit genannt und $|X|$ geschrieben.
- Eine leere Menge, also eine Menge mit 0 Elementen, wird auch durch $\emptyset$ angegeben. Man schreibt auch $\emptyset \equiv \{\}$.
- Beispiele:
  - $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $3 \in X$, $7 \notin X$, $|X| = 6$
  - $Y = \{1, 3, 4\}$, $Y \subset X$
- Mengen können auch durch Eigenschaften ihrer Elemente definiert werden. Man schreibt $X = \{x|\text{Eigenschaft von } x\}$.
- Dies erlaubt die Definition der
  - Vereinigungsmenge von X und Y: $X \cup Y \equiv \{z|z \in X \vee z \in Y\}$, wobei $\vee$ das logische Oder angibt,
  - Schnittmenge von X und Y: $X \cap Y \equiv \{z|z \in X \wedge z \in Y\}$, wobei $\wedge$ das logische Und angibt,
  - Differenz von X und Y: $X \setminus Y \equiv \{z|z \in X \wedge z \notin Y\} = \{z \in X|z \notin Y\}$.
- Beispiele: $\{0, 1\} \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2\}$, $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$, $\{0, 1\} \setminus \{1, 2\} = \{0\}$
- Die Konstruktion unendlicher Mengen ist etwas aufwändiger. Die natürlichen Zahlen sind z.B. durch von Neumann wie folgt konstruiert worden:
  1. Man **definiert** die Zahl 0 als die leere Menge, d.h.,
  $$0 \equiv \emptyset\,. \tag{2}$$
  2. Man **definiert** den Schritt von einer Zahl n zu einer Zahl $n + 1$:
  $$n + 1 \equiv n \cup \{n\} \tag{3}$$
  also z.B.
  $$1 \equiv \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}\,, \tag{4}$$
  $$2 \equiv \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,. \tag{5}$$

Einer jeden natürlichen Zahl wird so eine bestimmte Menge zugeordnet und Eigenschaften wie z.B. $n \leq m$ lassen sich elegant mit $n \subseteq m$ darstellen und ordnen somit die natürlichen Zahlen. Die unendliche Menge aller solcher natürlicher Zahlen wird durch das *Unendlichkeitsaxiom* postuliert und mit der Menge $\mathbb{N}$ identifiziert. Diese Menge kann also auch als

$$\mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{6}$$

geschrieben werden.

- Manchmal werden die natürlichen Zahlen auch ohne die 0 definiert und es ist nützlich explizit

$$\mathbb{N}^{\mathbb{0}} \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\,, \tag{7}$$

$$\mathbb{N}^{+} \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{8}$$

zu schreiben.

- Wir können somit auch die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} \equiv \{x | x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \tag{9}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} \equiv \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}^{+} \right\} \tag{10}$$

definieren.

- Es ist nützlich einen regulären Kettenbruch

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] \equiv a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \tag{11}$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}^{+}$ für $i \neq 0$ zu definieren. Ein solcher Kettenbruch der nach endlich vielen a_i sich nicht fortsetzt ist ein Element von $\mathbb{Q}$. Ein unendlicher Kettenbruch ist nicht in $\mathbb{Q}$, und wir nennen eine solche Zahl irrational.

- Die Menge aller regulärer Kettenbrüche (sowohl endlich als auch unendlich) definiert die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

- Beispiele:

  1. Eine rationale Zahl:

$$[1; 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{10}{7} \in \mathbb{Q}\,. \tag{12}$$

2. Man kann zeigen, dass die Kreiszahl π durch den unendlichen Kettenbruch

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots] \in \mathbb{R} \tag{13}$$

gegeben ist. Wir sehen, dass das fünfte Element ausgesprochen groß ist, was wir nutzen können um eine gute rationale Näherung von π zu finden (siehe Definition)

$$\begin{align} [3; 7, 15, 1] &= \frac{355}{113} \tag{14} \\ &= 3.141592\mathbf{920}\ldots, \tag{15} \\ \pi &= 3.141592\mathbf{654}\ldots. \tag{16} \end{align}$$

3. In diesem Sinne können wir eine irrationale Zahl definieren, die sich am schlechtesten durch eine rationale Zahl annähern lässt

$$[1; 1, 1, 1, 1, \ldots] \equiv \phi = 1.618033989\ldots. \tag{17}$$

Diese Zahl entspricht dem goldenen Schnitt, da

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = 1 + \frac{1}{\phi}. \tag{18}$$

($\phi = 1 + 1/\phi$ ist die Definition des Goldenen Schnitt's.)

4. Die Wurzel aus Zwei:

$$[1; 2, 2, 2, \ldots] = \sqrt{2}. \tag{19}$$

Beweis:

$$\alpha \equiv \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}} \tag{20}$$

und daher

$$\alpha = \frac{1}{2 + \alpha} \tag{21}$$

bzw.

$$0 = \alpha^2 + 2\alpha - 1 = (\alpha + 1)^2 - 2 \tag{22}$$

oder

$$\alpha + 1 = \sqrt{2} \tag{23}$$

da $\alpha > 0$. Daraus folgt nun

$$[1; 2, 2, 2, \ldots] = 1 + \alpha = \sqrt{2}. \tag{24}$$

- Diese Mengen erfüllen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \,. \tag{25}$$

- Eine wichtige Erweiterung der reellen Zahlen, die Menge der komplexen Zahlen, wird in der Hauptvorlesung eingeführt.

2 Induktion und geometrische Reihe

- Die oben genannte Konstruktion der natürlichen Zahlen durch Angabe eines ersten Elements (0) und einen Schritt ($n \to n+1$) gibt uns auch eine Methode einen Beweis für alle natürlichen Zahlen zu führen.

- Beispiel (geometrische Reihe): wir vermuten, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \,. \tag{26}$$

  Dies können wir nun zeigen indem wir zuerst den Fall $N = 0$

$$\sum_{n=0}^{0} x^n = 1 = \frac{x^1 - 1}{x - 1} \tag{27}$$

  zeigen. Wir nehmen dann an, dass für $N - 1$ bereits Eq. (26) gilt und zeigen dann den Fall N, d.h.,

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \sum_{n=0}^{N-1} x^n + x^N = \frac{x^N - 1}{x - 1} + x^N \tag{28}$$

$$= \frac{x^N - 1 + x^N(x-1)}{x - 1} = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \,, \tag{29}$$

  was zu zeigen war.

- Ein solcher Beweis wird auch Beweis durch Induktion genannt.

3 Lineare Gleichungen

- Eine lineare Gleichung einer Variable x ist von der Form

$$ax = b \tag{30}$$

mit $a, b, x \in \mathbb{R}$ und wird für den Fall $a \neq 0$ durch

$$x = \frac{b}{a} \tag{31}$$

gelöst.

- Im Falle mehrerer Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und m Gleichungen mit $n, m \in \mathbb{N}$, sprechen wir von einem linearen Gleichungssystem und schreiben

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,, \tag{32}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,, \tag{33}$$
$$\ldots \tag{34}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \tag{35}$$

mit $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ bzw. $j \in \{1, \ldots, n\}$. Diese Art von Gleichungssystemen werden im Detail in der Vorlesungen *Mathematische Methoden* bzw. *Lineare Algebra* besprochen.

- Man benötigt $m \geq n$ Gleichungen um eine eindeutige Lösung für $\{x_j\}$ zu finden. Für $m > n$ kann es auch keine Lösung geben.

- Man kann zeigen, dass wir ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen Gleichung addieren bzw. Zeilen tauschen können ohne die Lösung zu verändern.

- Gaußsches Eliminationsverfahren: Bringe durch diese beiden Umformungen, das System auf die Stufenform

$$\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1\,, \tag{36}$$
$$\tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2\,, \tag{37}$$
$$\ldots \tag{38}$$
$$\tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m \tag{39}$$

mit $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i \in \mathbb{R}$. Man eliminiert hierbei in jedem Schritt eine Variable von allen bis auf eine Gleichung. Danach kann Schritt-für-Schritt eine Variable nach der anderen gelöst werden, fange mit x_n an.

- Beispiel: drei Gleichungen, drei Variablen:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4\,, \tag{40}$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2\,, \tag{41}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3\,. \tag{42}$$

Addiere $-3\times$ die dritte Gleichung zur ersten, und $-2\times$ die dritte Gleichung zur zweiten:

$$\begin{aligned} -x_2 - 5x_3 &= -5\,, && (43)\\ x_2 - 3x_3 &= -4\,, && (44)\\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\,. && (45) \end{aligned}$$

Addiere die zweite zur ersten Gleichung:

$$\begin{aligned} -8x_3 &= -9\,, && (46)\\ x_2 - 3x_3 &= -4\,, && (47)\\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\,. && (48) \end{aligned}$$

Ordne die Zeilen um (optional):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\,, && (49)\\ x_2 - 3x_3 &= -4\,, && (50)\\ -8x_3 &= -9\,. && (51) \end{aligned}$$

Löse die letzte Gleichung und setze das Ergebnis in die anderen ein:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{3}{4}\,, && (52)\\ x_2 &= -\frac{5}{8}\,, && (53)\\ x_3 &= \frac{9}{8}\,. && (54) \end{aligned}$$

Löse die zweitletzte Gleichung und setze das Ergebnis in die erste ein:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{8}\,, && (55)\\ x_2 &= -\frac{5}{8}\,, && (56)\\ x_3 &= \frac{9}{8}\,. && (57) \end{aligned}$$

4 Funktionen einer Veränderlichen

- Unter einer Funktion f einer reellen Variablen, verstehen wir eine Abbildung von $X \subseteq \mathbb{R}$ nach $Y \subseteq \mathbb{R}$, die einen Wert $x \in X$ nach $f(x) \in Y$ abbildet. Wir schreiben auch

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x)\,. \tag{58}$$

Wenn nicht anders angegeben, wird im Folgenden $X = Y = \mathbb{R}$ verwendet.

- Eine wichtige Klasse solcher Funktionen ist das Polynom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \tag{59}$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$.

- Spezialfälle:

1. Eine Konstante ($N = 0$):

$$f(x) = a_0 \,. \tag{60}$$

2. Eine affine Abbildung ($N = 1$):

$$f(x) = a_0 + a_1 x \,. \tag{61}$$

3. Eine lineare Abbildung ($N = 1, a_0 = 0$):

$$f(x) = a_1 x \,. \tag{62}$$

4. Eine quadratische Abbildung ($N = 2$):

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,. \tag{63}$$

- Eine quadratische Abbildung können wir durch quadratische Ergänzung immer auf Parabel-Form bringen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \tag{64}$$

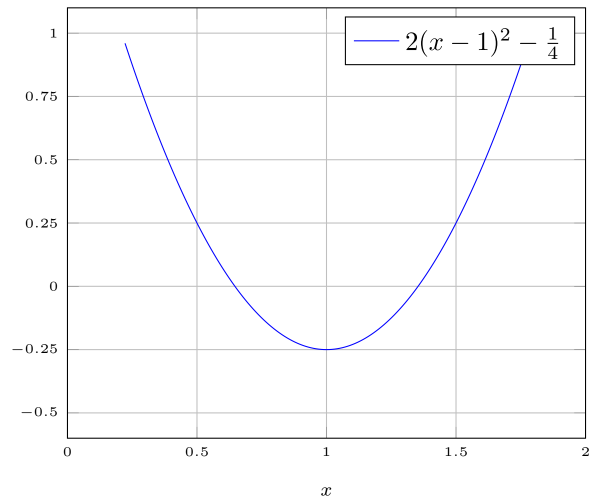
$$= a(x - x_0)^2 + y_0 \tag{65}$$

mit

$$x_0 \equiv -\frac{b}{2a}\,, \qquad y_0 \equiv -\frac{b^2}{4a} + c\,, \tag{66}$$

wobei $a \neq 0$.

Beispiel ($x_0 = 1$, $y_0 = -\frac{1}{4}$, $a = 2$):



- Die Lösung der quadratischen Gleichung

$$0 = ax^2 + bx + c \tag{67}$$

entspricht also dem Schnitt der Parabel mit der konstanten Funktion $g(x) = 0$. Die Parabel-Form dieser Gleichung kann man dann leicht zu

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{D}{4a^2} \tag{68}$$

mit

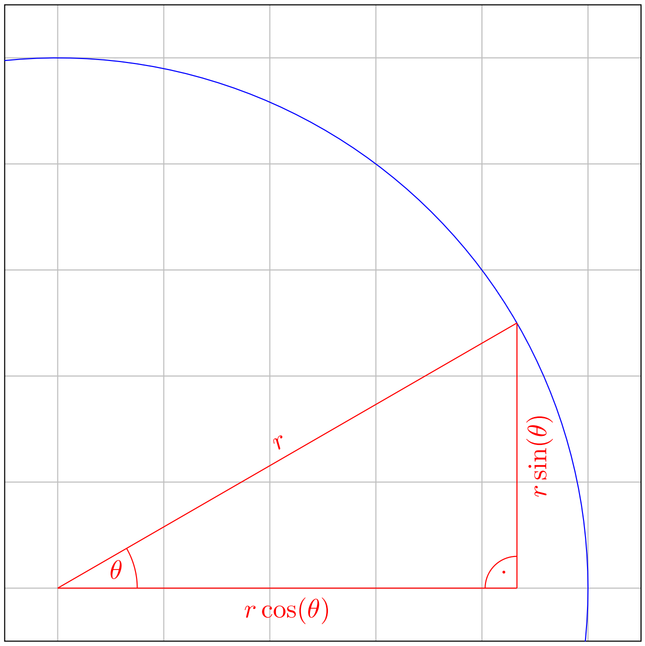
$$D \equiv b^2 - 4ac \tag{69}$$

umformen und die Lösungen

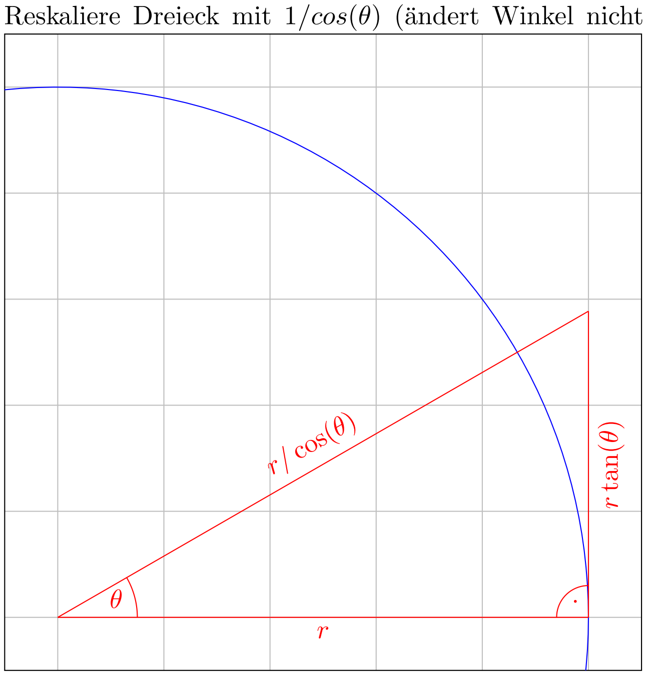
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{70}$$

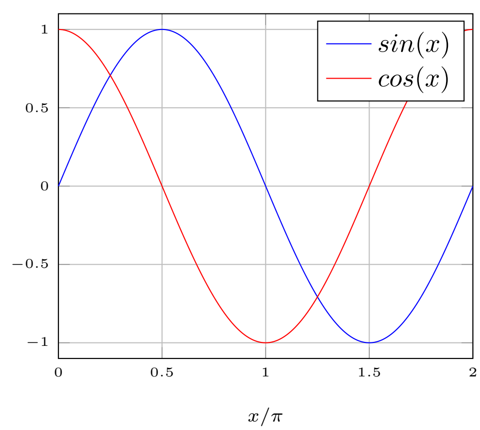
finden. Man beachte, dass nur für $D \geq 0$ (äquivalent zu $y_0 \leq 0$) Lösungen mit $x \in \mathbb{R}$ existieren.

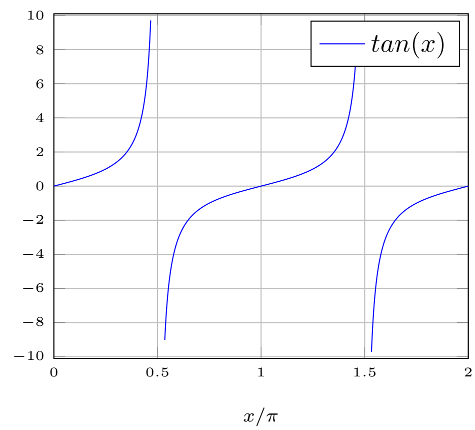
- Rechtwinkliges Dreieck und trigonometrische Funktionen ($\sin$, $\cos$, $\tan(x) \equiv \sin(x)/\cos(x)$):



Reskaliere Dreieck mit $1/cos(\theta)$ (ändert Winkel nicht, aber Abstände):







- Pythagoras sagt dann für $r \neq 0$: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$
- Es ist üblich das Argument der trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß anzugeben: $360° = 360$ deg $= 2\pi$. Daher ist z.B.

$$\sin\left(180°\right) = \sin\left(180° \frac{2\pi}{360°}\right) = \sin\left(\pi\right) = 0\,. \tag{71}$$

5 Spezielle Funktionen

- Wir definieren:

$$\mathbb{R}^+ \equiv \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}\,, \tag{72}$$
$$\mathbb{R}_0^+ \equiv \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,. \tag{73}$$

- Potenzfunktion: $f(x) = ax^r$ mit $a, r \in \mathbb{R}$ und

$$x \in \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } r > 0 \wedge r \in \mathbb{Z}\,, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } r < 0 \wedge r \in \mathbb{Z}\,, \\ \mathbb{R}_0^+ & \text{falls } r > 0 \wedge r \notin \mathbb{Z}\,, \\ \mathbb{R}^+ & \text{falls } r < 0 \wedge r \notin \mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{74}$$

- Exponentialfunktion: $f(x) = a^x$ mit $a, x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.
- Eigenschaften: $a^x a^y = a^{x+y}$, $a^{-x} = 1/a^x$, $a^0 = 1$ mit $y \in \mathbb{R}$
- Die Fakultät: $n! \equiv (n-1)!n$, $0! \equiv 1$ mit $n \in \mathbb{N}$
- e-Funktion:

$$\exp(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \equiv e^x \tag{75}$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $e \equiv \exp(1)$. Diese Gleichungen werden in der Mathematischen Methoden Vorlesung bewiesen.

Numerisch durch fünf Terme der jeweiligen Gleichung genähert

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.70833\ldots \tag{76}$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2.48832\ldots \tag{77}$$

oder exakt

$$e = 2.71828\ldots. \tag{78}$$

- Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion

  $$\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x \tag{79}$$

  mit Eigenschaften $\ln(a^x) = x\ln(a)$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

- Bezug zur Exponential- und natürlichen Logarithmusfunktion:

  $$f(x) = a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x\ln(a)) \tag{80}$$

- Daher kann auch der Basis-a Logarithmus

  $$\log_a(a^x) \equiv \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x \tag{81}$$

  definiert werden.

6 Grenzwerte und Differentialrechnung

- Wir definieren eine Folge durch ihre Elemente $a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
- Falls es einen Wert b gibt, für welchen für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden werden kann, so dass für alle $n > n_0$
$$|a_n - b| < \varepsilon \tag{82}$$
gilt, so nennen wir b Grenzwert der Folge und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b\,. \tag{83}$$
Es existiert nicht für jede Folge ein solcher Grenzwert.
- Beispiel: $N \to \infty$ der geometrischen Reihe:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{x^{N+1}-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} \tag{84}$$
falls $|x| < 1$.
- Es kann auch ein Grenzwert $y \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zum Wert $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert werden:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y \tag{85}$$
falls es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt mit
$$|f(x) - y| < \varepsilon \tag{86}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$.
- Landau o Notation: Wenn für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass
$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0 \tag{87}$$
dann schreiben wir
$$f(x) = o(g(x))\,. \tag{88}$$
Beispiele: $2x^3 + x^2 = o(x)$, $2x^{3/2} = o(x)$, $x^3 = o(x^2)$
- Wir definieren die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als
$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\,. \tag{89}$$
Existiert dieser Grenzwert, so nennen wir die Funktion differenzierbar im Punkt x. Aus diesem Grund können wir in einer kleinen Region um x schreiben
$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + o(\varepsilon)\,. \tag{90}$$
Wir verwenden diese Gleichung im Folgenden.

- Daraus folgt nun für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(g(x+\varepsilon)) - f(g(x))}{\varepsilon} && (91)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(g(x) + g'(x)\varepsilon + o(\varepsilon)) - f(g(x))}{\varepsilon} && (92)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(g(x)) + f'(g(x))(g'(x)\varepsilon + o(\varepsilon)) - f(g(x))}{\varepsilon} && (93)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[f'(g(x))g'(x) + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon) \right] = f'(g(x))g'(x) && (94)
\end{aligned}$$

und die Produktregel

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x)g(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)g(x+\varepsilon) - f(x)g(x)}{\varepsilon} && (95)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(f(x) + \varepsilon f'(x) + o(\varepsilon))(g(x) + \varepsilon g'(x) + o(\varepsilon)) - f(x)g(x)}{\varepsilon} && (96)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon(g(x)f'(x) + g'(x)f(x)) + o(\varepsilon)}{\varepsilon} && (97)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[g(x)f'(x) + g'(x)f(x) + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon) \right] && (98)\\
&= g(x)f'(x) + g'(x)f(x)\,. && (99)
\end{aligned}$$

- Für die e-Funktion finden wir

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp(x+\varepsilon) - \exp(x)}{\varepsilon} && (100)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp(x)\exp(\varepsilon) - \exp(x)}{\varepsilon} && (101)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp(x)(1 + \varepsilon + o(\varepsilon)) - \exp(x)}{\varepsilon} && (102)\\
&= \exp(x) \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon)}{\varepsilon} && (103)\\
&= \exp(x)\,. && (104)
\end{aligned}$$

- Für $f^{-1}(x)$ mit $f(f^{-1}(x)) = x$ folgt, dass

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) \qquad (105)$$

und daher

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,. \qquad (106)$$

- Beispiel: $f(x) = \exp(x)$ hat

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}\,. \tag{107}$$

- Für die trigonometrischen Funktionen gilt: $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$
- Für die Potenzfunktion

$$\begin{aligned}
(x^a)' &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(x+\varepsilon)^a - x^a}{\varepsilon} && (108)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp(a\ln(x+\varepsilon)) - x^a}{\varepsilon} && (109)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp\left(a\left(\ln(x) + \varepsilon\ln'(x) + o(\varepsilon)\right)\right) - x^a}{\varepsilon} && (110)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp\left(a\left(\ln(x) + \varepsilon\frac{1}{x} + o(\varepsilon)\right)\right) - x^a}{\varepsilon} && (111)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\exp\left(a\ln(x)\right)\exp\left(\varepsilon\frac{a}{x} + o(\varepsilon)\right) - x^a}{\varepsilon} && (112)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^a\left(1 + \varepsilon\frac{a}{x} + o(\varepsilon)\right) - x^a}{\varepsilon} && (113)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon a x^{a-1} + o(\varepsilon)}{\varepsilon} && (114)\\
&= a x^{a-1}\,. && (115)
\end{aligned}$$

- Beispiel:
    1. $f(x) = \sin(x)^2$ hat $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
    2. $f(x) = \sin(x^2)$ hat $f'(x) = \cos(x^2)2x$
- Ein Extremum von $f(x)$ hat $f'(x) = 0$. Um Maxima von Minima zu unterscheiden müssen höhere Ableitungen untersucht werden.

7 Integralrechnung

- Wir definieren eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x)$ zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ durch die Eigenschaft

$$F'(x) = f(x)\,. \tag{116}$$

- Wir nennen f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Eine Funktion ist also genau dann stetig in x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{117}$$

- Fundamentalsatz der Analysis: Haben wir eine solche Stammfunktion und ist $f(x)$ stetig für alle $x \in [a, b]$, so ist das bestimmte Integral

$$\int_a^b dx f(x) \equiv [F(x)]_a^b \tag{118}$$

  mit $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$[F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)\,. \tag{119}$$

- Integrationsgrenzen $\pm\infty$ (uneigentliche Integrale) sind durch die entsprechenden Grenzwerte definiert, z.B.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{b \to \infty} F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a)\,. \tag{120}$$

- Das Integral ist linear, d.h.,

$$\int_a^b dx(cf(x) + dg(x)) = c\left(\int_a^b dx f(x)\right) + d\left(\int_a^b dx g(x)\right) \tag{121}$$

  für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Für die bereits besprochenen Funktionen:

  1. $f(x) = x^n$, $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}$
  2. $f(x) = x^{-1}$, $F(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$
  3. $f(x) = \exp(x)$, $F(x) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$
  4. $f(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$
  5. $f(x) = \cos(x)$, $F(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$
  6. $f(x) = \ln(x)$, $F(x) = x(\ln(x) - 1)$, $x \in \mathbb{R}^+$
     Beweis: $F'(x) = x'(\ln(x) - 1) + x(\ln(x) - 1)' = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x) = f(x)$

- Beispiel:

  1.
  $$\int_1^2 dx \frac{1}{x^2} = \left[-x^{-1}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}\,. \tag{122}$$

  2.
  $$\int_{-2}^2 dx \frac{1}{x^2} \tag{123}$$

  ist nicht definiert, da x^{-2} bei $x = 0$ nicht definiert und daher auch nicht stetig ist.

- Partielle Integration: Aus dem Fundamentalsatz der Analysis und der Produktregel folgt für stetig differenzierbare $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b dx (f(x)g(x))' \tag{124}$$

$$= \int_a^b dx f'(x)g(x) + \int_a^b dx f(x)g'(x)\,. \tag{125}$$

Daher ist

$$\int_a^b dx f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b dx f(x)g'(x)\,. \tag{126}$$

Beispiel: $f = -\cos$, $g = \cos$:

$$\int_a^b dx \sin(x)\cos(x) = -\int_a^b dx \cos(x)\sin(x) - \left[\cos(x)^2\right]_a^b \tag{127}$$

Daher

$$2\int_a^b dx \sin(x)\cos(x) = \cos(a)^2 - \cos(b)^2 \tag{128}$$

und

$$\int_a^b dx \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(a)^2 - \cos(b)^2\right)\,. \tag{129}$$

- Variablentransformation (Substitution): Aus dem Fundamentalsatz der Analysis und der Kettenregel folgt für stetig differenzierbare $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, F Stammfunktion von f und $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$\int_{g(a)}^{g(b)} dy f(y) = [F(y)]_{g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_a^b = \int_a^b dx\,[F(g(x))]' \tag{130}$$

$$= \int_a^b dx F'(g(x))g'(x) = \int_a^b dx g'(x)f(g(x))\,. \tag{131}$$

Eine sehr nützliche Version dieser Gleichung erhalten wir durch die Identifikation von $h(g(x)) \equiv g'(x)f(g(x))$ und daher

$$f(g(x)) = \frac{h(g(x))}{g'(x)} \tag{132}$$

bzw. mit $g(x) = y$

$$f(y) = \frac{h(y)}{g'(g^{-1}(y))} \tag{133}$$

und daher

$$\boxed{\int_a^b dx h(g(x)) = \int_{g(a)}^{g(b)} dy \frac{h(y)}{g'(g^{-1}(y))} = \int_{g(a)}^{g(b)} dy (g^{-1}(y))' h(y)\,. \qquad (134)}$$

Beispiel:

$$\int_0^b dx \cos(2x) \tag{135}$$

Identifiziere:

$$h(y) = \cos(y)\,, \qquad\qquad g(x) = 2x\,. \tag{136}$$

Daher

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{2}y\,, \qquad\qquad (g^{-1}(y))' = \frac{1}{2} \tag{137}$$

und

$$\int_0^b dx \cos(2x) = \frac{1}{2}\int_0^{2b} dy \cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(y)\right]_0^{2b} = \frac{1}{2}\sin(2b)\,. \tag{138}$$

- Trick der parametrischen Ableitung und Fakultät:
  Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\infty dx x^n \exp(-ax) = (-1)^n \int_0^\infty dx \left(\frac{d}{da}\right)^n \exp(-ax) \tag{139}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{d}{da}\right)^n \int_0^\infty dx \exp(-ax) \tag{140}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{d}{da}\right)^n \left[-\frac{1}{a}\exp(-ax)\right]_0^\infty \tag{141}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{d}{da}\right)^n a^{-1} \tag{142}$$

$$= n! a^{-1-n}\,. \tag{143}$$

Daher ist

$$n! = \int_0^\infty dx x^n \exp(-x)\,. \tag{144}$$

Die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert (bzw. die Einschränkung der Vertauschbarkeit) wird in der Analysis Vorlesung besprochen. (Idee: Wann sind zwei Grenzwerte vertauschbar?)

8 Statistik

- Wir beschränken uns auf $\mathbb{R}$-wertige Zufallsexperimente mit Wahrscheinlichkeit
$$p : \mathbb{R} \to [0, 1] \,. \tag{145}$$
Diese dienen als Modell einer experimentellen Messung in der Physik (z.B. Messung des Ortes eines Teilchens).

- Messen wir in einem solchen Experiment N Werte $x_0, \ldots, x_{N-1} \in \mathbb{R}$, so gilt
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) f(x) \equiv \langle f(x) \rangle_x \tag{146}$$
für eine hinreichend integrable Funktion f. Es folgt
$$\langle 1 \rangle_x = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 \,. \tag{147}$$

- Wir definieren den Erwartungswert
$$\mu \equiv \langle x \rangle_x \tag{148}$$
und die Varianz
$$\sigma^2 \equiv \langle (x-\mu)^2 \rangle_x = \langle x^2 \rangle_x - 2\mu \langle x \rangle_x + \langle 1 \rangle_x \mu^2 = \langle x^2 \rangle_x - (\langle x \rangle_x)^2 \,. \tag{149}$$
Die Wurzel der Varianz wird auch Standardabweichung oder Messfehler genannt.

- Messen wir N Werte $x_0, \ldots, x_{N-1}$ und bilden den Mittelwert
$$m \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \,, \tag{150}$$
so kann man m auch als Ergebnis einer Messung verstehen.

- Die Werte x_i sind unabhängig voneinander, d.h., wir nehmen an, dass die Verteilung der m gleich $\hat{p}$ mit
$$\hat{p}(m) = p(x_0) p(x_1) \cdots p(x_{N-1}) \,. \tag{151}$$

- Wiederholen wir diesen Vorgang nun M mal mit Messwerten $m_0, \ldots, m_{M-1}$, so gibt es auch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion p_N mit
$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f(m_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dm p_N(m) f(m) \equiv \langle f(m) \rangle_m \,. \tag{152}$$

- Die Varianz dieses Mittelwertes ist

$$
\begin{aligned}
&\sigma_N^2 \equiv \langle m_N^2 \rangle_m - (\langle m_N \rangle_m)^2 = \qquad (153)\\
&\int dm p_N(m) m^2 - \mu^2 = \\
&\frac{1}{N^2} \int dx_0 p(x_0) \int dx_1 p(x_1) \cdots \int dx_{N-1} p(x_{N-1}) \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n \right)^2 - \mu^2 = \\
&\frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0}^{N-1} \int dx_0 p(x_0) \int dx_1 p(x_1) \cdots \int dx_{N-1} p(x_{N-1}) x_n x_m - \mu^2 = \\
&\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \int dx_n p(x_n) x_n^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0;n\neq m}^{N-1} \int dx_n p(x_n) \int dx_m p(x_m) x_n x_m - \mu^2 = \\
&\frac{1}{N} \langle x^2 \rangle_x + \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0;n\neq m}^{N-1} \mu^2 - \mu^2 = \\
&\frac{1}{N} \langle x^2 \rangle_x + \frac{1}{N^2} (N^2 - N) \mu^2 - \mu^2 = \\
&\frac{1}{N} \langle x^2 \rangle_x - \frac{1}{N} \mu^2 = \\
&\frac{1}{N} \sigma^2 .
\end{aligned}
$$

  Der Messfehler des Mittelwertes von N Messungen ist also

$$\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma . \qquad (154)$$

- Ohne weitere Kenntnis von p ist es nicht Möglich zu quantifizieren, wie wahrscheinlich es ist, dass $\mu \in [m - \sigma_N, m + \sigma_N]$.

- Hier hilft nun der Zentraler Grenzwertsatz:

$$\lim_{N\to\infty} p_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{m-\mu}{\sigma_N^2} \right)^2 \right) \qquad (155)$$

  unabhängig von der Verteilung p der einzelnen x_i! Diese Verteilung nennt man auch Normalverteilung oder Gaussverteilung.

  Im Allgemeinen ist dieser Grenzwert schneller erreicht, falls p bereits nahe an einer Normalverteilung ist.

- Da also für $N \to \infty$ (beachte N ist die Anzahl der gemittelten Werte und nicht die Anzahl der Messungen eines solchen Mittelwertes) die Verteilung bekannt ist, können wir nun berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass ein

Wert m innerhalb von σ_N liegen sollte:

$$P(1\sigma) = 0.6827\,, \tag{156}$$
$$P(2\sigma) = 0.9545\,, \tag{157}$$
$$P(3\sigma) = 0.9973\,, \tag{158}$$
$$P(4\sigma) = 0.999937\,, \tag{159}$$
$$P(5\sigma) = 0.9999994 \tag{160}$$

mit

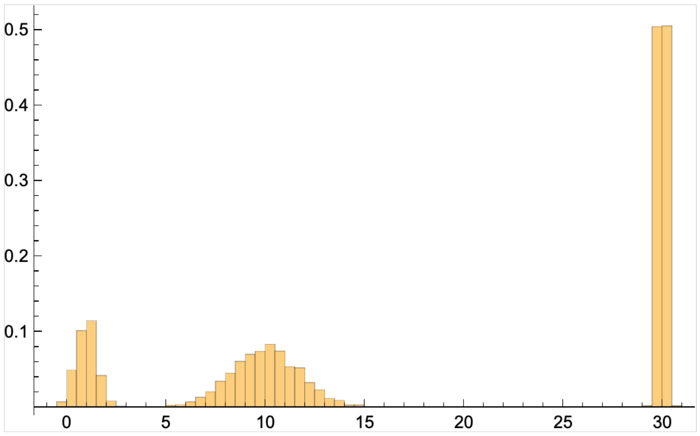
$$P(n\sigma_N) \equiv \int_{\mu-n\sigma_N}^{\mu+n\sigma_N} dm \lim_{N\to\infty} p_N(m)\,. \tag{161}$$

In[∘]:=
```
dist = MixtureDistribution[{1, 2, 3}, {NormalDistribution[1, 1 / 2],
    NormalDistribution[10, 5 / 3], NormalDistribution[30, 1 / 6]}];
measure[] := RandomVariate[dist]
```

In[∘]:=
```
data = Table[measure[], {i, 1, 10^4}];
```

In[∘]:=
```
Show[Histogram[data, 45, "ProbabilityDensity"]]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
sigma = Sqrt[Variance[data]]
mu = Mean[data]
```

Out[∘]= 11.8754

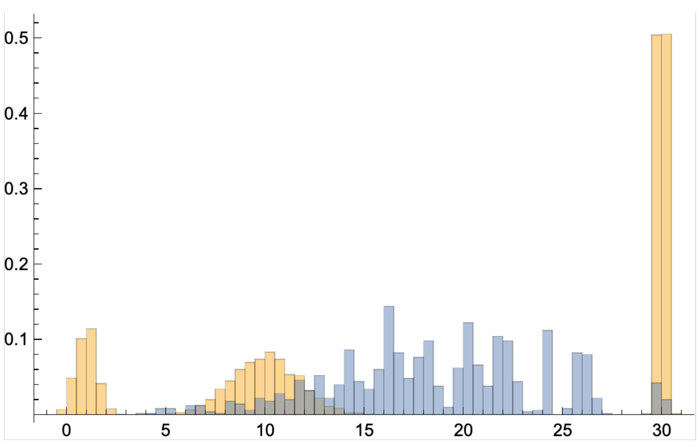
Out[∘]= 18.6837

In[∘]:=
```
average[N_] := Sum[measure[], {n, 1, N}] / N
```

In[∘]:=
```
dataN5 = Table[average[5], {i, 1, 10^3}];
dataN10 = Table[average[10], {i, 1, 10^3}];
dataN20 = Table[average[20], {i, 1, 10^3}];
```

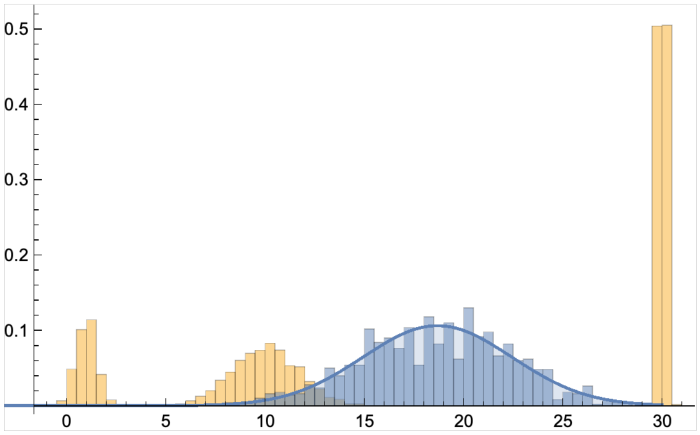
In[∘]:=
```
Show[Histogram[{data, dataN5}, 45, "ProbabilityDensity"]]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Show[{Histogram[{data, dataN10}, 45, "ProbabilityDensity"],
  Plot[PDF[NormalDistribution[mu, sigma / Sqrt[10]], x] // Evaluate,
   {x, -6, 30}, Filling → Axis, PlotRange → Full]}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Show[{Histogram[{data, dataN20}, 45, "ProbabilityDensity"],
  Plot[PDF[NormalDistribution[mu, sigma / Sqrt[20]], x] // Evaluate,
   {x, -6, 30}, Filling → Axis, PlotRange → Full]}]
```

Out[∘]=