Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Winter 2020/2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Sebastian Spiegel (Gruppe 1), Raphael Lehner (Gruppe 2), Carolyn Echter (Gruppe 3), Selina Nöcker (Gruppe 4), Adrian Seith (Gruppe 5), Daniel Knüttel (Gruppe 6)

Übungen zu Mathematische Methoden

Blatt 12 (abzugeben am 10. Februar; die Lösung wird zentral am 11. Februar in der Vorlesung besprochen)

Aufgabe 1 Kurvenintegral (5 Punkte)

Eine Ellipse um den Ursprung ist definiert durch die Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, welche die Gleichung

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

erfüllen für ein $a, b \in \mathbb{R}^+$. Verwenden Sie die Parametrisierung

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

um den Umfang $U(a, b)$ einer Ellipse mit Parameter a und b zu berechnen. Hierzu zeigen Sie zuerst, dass Sie das zu berechnende Integral auf die Form

$$U(a, b) = a \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos(\theta)^2} \tag{3}$$

bringen können mit der numerischen Exzentrizität

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\,. \tag{4}$$

Für $\varepsilon = 0$ ist die Ellipse ein Kreis. Für hinreichend kleine ε kann das Integral mit Hilfe einer Taylorentwicklung gelöst werden. Entwickeln Sie den Integranden zur Ordnung ε^2 und berechnen Sie den Umfang zu dieser Ordnung.

Aufgabe 2 Divergenz, Gradient, Rotation (5 Punkte)

Beweisen Sie die Gleichungen

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0\,, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} g = 0\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} g = \operatorname{grad}\operatorname{div} g - \Delta g \tag{7}$$

für stetig differenzierbare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 Gauss (10 Punkte)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius 1 um den Ursprung und

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

Berechnen Sie sowohl das Integral

$$\int_\Omega dx \, \mathrm{div}\, f(x) \tag{9}$$

als auch

$$\int_\varphi dx \cdot f(x) \tag{10}$$

für eine Parametrisierung φ der Kugeloberfläche für die der Normalvektor aus der Kugel heraus zeigt. Vergleichen Sie beide Integrale.