Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Winter 2020/2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Sebastian Spiegel (Gruppe 1), Raphael Lehner (Gruppe 2), Carolyn Echter (Gruppe 3), Selina Nöcker (Gruppe 4), Adrian Seith (Gruppe 5), Daniel Knüttel (Gruppe 6)

Übungen zu Mathematische Methoden
Blatt 11 (abzugeben am 3. Februar)

Aufgabe 1 Rotationen in 3d (5 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Matrix $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche eine Rotation in der x_1–x_2 Ebene beschreibt. Zeigen Sie, dass diese Matrix orthogonal ist. Hat diese Matrix einen reellen Eigenwert für einen beliebigen Rotationswinkel? Was ist die Bedeutung des entsprechenden Eigenraums?

Aufgabe 2 Unitäre und Hermitesche Matrizen (5 Punkte)

Sei $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Hermitesche Matrix und

$$U \equiv \exp(iH)\,. \tag{1}$$

Verwenden Sie die unitäre Diagonalisierbarkeit von H und die in der Vorlesung angegebene Definition einer Matrixfunktion für exp um zu zeigen, dass U eine unitäre Matrix ist.

Aufgabe 3 Kugelkoordinaten (5 Punkte)

Wir können einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ schreiben als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \equiv g(r,\theta,\phi) \tag{2}$$

mit entsprechenden Kugelkoordinaten $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0,\pi[$ und $\phi \in [0,2\pi[$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix

$$Dg \tag{3}$$

und die Funktionaldeterminante $\det(Dg)$, wie in der Vorlesung besprochen.

Aufgabe 4 Volumen einer Kugel (5 Punkte)

Sei

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| |x| < R \right\} \tag{4}$$

die Menge aller Punkte innerhalb einer Kugel mit Radius $R \in \mathbb{R}^+$. Das Volumen V der Kugel entspricht dem Integral

$$V = \int_\Omega dx\, 1\,. \tag{5}$$

Berechnen Sie V mit dem Transformationssatz und den Kugelkoordinaten aus der dritten Aufgabe.