

Übungen zu Mathematische Methoden
Blatt 10 (abzugeben am 27. Januar)

Aufgabe 1 Rechnen in unitären Vektorräumen (8 Punkte)

Berechnen Sie jeweils

a)

$$\begin{pmatrix} 2i - 1 \\ 3i \end{pmatrix}^\dagger \quad (1)$$

b)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2i - 1 \\ 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2)$$

c)

$$\left| \begin{pmatrix} 2i - 1 \\ 3i \end{pmatrix} \right| \quad (3)$$

d)

$$d \left(\begin{pmatrix} 2i - 1 \\ 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix} \right) \quad (4)$$

mit dem Standardskalarprodukt und der dadurch induzierten Norm und Metrik.

Aufgabe 2 Rechnen mit hermiteschen und unitären Matrizen (6 Punkte)

Berechnen Sie explizit die Eigenwerte der hermiteschen Matrix

$$H \equiv \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Zeigen Sie dann, dass

$$U \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

eine unitäre Matrix ist und berechnen Sie ihre Eigenwerte. Bestimmen Sie auch U^{-1} .

Aufgabe 3 Vertiefung: Jacobi-Identität (6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der ε -Tensoren, dass für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \quad (7)$$