Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Winter 2020/2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Sebastian Spiegel (Gruppe 1), Raphael Lehner (Gruppe 2), Carolyn Echter (Gruppe 3), Selina Nöcker (Gruppe 4), Adrian Seith (Gruppe 5), Daniel Knüttel (Gruppe 6)

Übungen zu Mathematische Methoden
Blatt 8 (abzugeben am 13. Januar)

Aufgabe 1 Lagrange-Identität (4 Punkte)

Zeigen Sie analog zum Beweis der Graßmann-Identität in der Vorlesung die Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) \tag{1}$$

für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 Determinante (8 Punkte)

Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Aufgabe 3 Determinante und Spur für 2×2 Matrizen (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für Matrizen $M \in K^{2\times 2}$ gilt

$$2 \det(M) = \mathrm{Spur}(M)^2 - \mathrm{Spur}(M^2) \,, \tag{5}$$

wobei $M^2 = MM$ mit der Matrix-Multiplikation zwischen den Faktoren M. Die Spur über die Matrix ist definiert als die Summe der diagonalen Matrixelemente.
Beachte, dass diese Formel nur für 2×2 Matrizen gilt, aber ähnliche Formeln für höherdimensionale Matrizen gezeigt werden können.

Aufgabe 4 Vertiefung: Koordinatenraum (4 Punkte)

Sei V der Vektorraum der Lösungen der linearen GDGL

$$f''(x) + f(x) = 0 \tag{6}$$

mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, wie in der Vorlesung besprochen. Wir haben bereits gezeigt, dass für $b_1(x) = e^{ix}$ und $b_2(x) = e^{-ix}$ gilt $b_1, b_2 \in V$ und dass b_1, b_2 eine Basis B von V bilden.
Wir betrachten nun den Koordinatenraum $\mathbb{C}^2$ von V zur Basis B. Was sind die Koordinaten des Vektors $g(x) \in V$ mit

$$g(x) = \cos(x) + \sin(x) \tag{7}$$

in dieser Basis?