Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Winter 2020/2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Sebastian Spiegel (Gruppe 1), Raphael Lehner (Gruppe 2), Carolyn Echter (Gruppe 3), Selina Nöcker (Gruppe 4), Adrian Seith (Gruppe 5), Daniel Knüttel (Gruppe 6)

Übungen zu Mathematische Methoden
Blatt 7 (abzugeben am 23. Dezember)

Aufgabe 1 Gleichungssystem (5 Punkte)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie den Gauß-Jordan Algorithmus.

Aufgabe 2 Inverse Matrix (5 Punkte)

Finden Sie das Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Verwenden Sie wieder den Gauß-Jordan Algorithmus.

Aufgabe 3 Basistransformation (6 Punkte)

Finden Sie die Basistransformationsmatrix T, welche die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

auf die Vektoren

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

abbildet, d.h.,

$$b'_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} b_j \tag{5}$$

für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie als Erstes, dass sich Gl. (5) auf die Form

$$AX = B \tag{6}$$

mit Matrizen $A, X, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$X = T^T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

brigen lässt. Sie schreiben also die Vektoren b'_i als Spalten in B und die Vektoren b_i als Spalten in A. Verwenden Sie dann wieder den Gauß-Jordan Algorithmus um X zu finden und Transponieren Sie das Ergebnis um T zu finden.

Aufgabe 4 Vertiefung: Matrix-Matrix Multiplikation (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{8}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \tag{9}$$