Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Winter 2020/2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Sebastian Spiegel (Gruppe 1), Raphael Lehner (Gruppe 2), Carolyn Echter (Gruppe 3), Selina Nöcker (Gruppe 4), Adrian Seith (Gruppe 5), Daniel Knüttel (Gruppe 6)

# Übungen zu Mathematische Methoden
# Blatt 6 (abzugeben am 16. Dezember)

---

## Aufgabe 1 Bild einer linearen Abbildung ist ein Untervektorraum (4 Punkte)

Sei $V$ und $W$ ein $K$-Vektorraum und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{bild}(f)$ ein Untervektorraum von $W$ ist.
Sie dürfen sich darauf beschränken zu zeigen, dass

a) $\mathrm{bild}(f) \subseteq W$ und

b) $\alpha w + \beta w' \in \mathrm{bild}(f)$ für $w, w' \in \mathrm{bild}(f)$ und $\alpha, \beta \in K$.

## Aufgabe 2 Koordinaten eines Vektors in verschiedenen Basen (4 Punkte)

Sei $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Koordinaten $c = (1, 0, 2)$ in der Basis

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

d.h.

$$v = c_0 b_0 + c_1 b_1 + c_2 b_2 = b_0 + 2b_2\,. \tag{2}$$

Geben Sie die Koordinaten von $v$ in der Basis

$$b'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

an.

## Aufgabe 3 Matrix-Vektor Multiplikation (3 Punkte)

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{5}$$

**Aufgabe 4 Matrix-Matrix Multiplikation (5 Punkte)**

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit $\phi, \theta \in \mathbb{R}$. Zur Vereinfachung des Ergebnisses, verwenden Sie

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)\,, \tag{8}$$

$$\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) \tag{9}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 5 Rang einer Matrix berechnen (4 Punkte)**

Berechnen Sie $\mathrm{rang}(M)$ für

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{10}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst was $\mathrm{bild}(M)$ ist indem Sie $M$ auf einen beliebigen Vektor $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ anwenden. Finden Sie dann eine Basis für $\mathrm{bild}(M)$.