Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Winter 2020/2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Sebastian Spiegel (Gruppe 1), Raphael Lehner (Gruppe 2), Carolyn Echter (Gruppe 3), Selina Nöcker (Gruppe 4), Adrian Seith (Gruppe 5), Daniel Knüttel (Gruppe 6)

Übungen zu Mathematische Methoden
Blatt 2 (abzugeben am 18. November)

Aufgabe 1 Komplexe Zahlen (4 Punkte)

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

a) $1/i$

b) $1/(2+3i)$

c) $\sqrt{-2+2i}$

Aufgabe 2 Faktorisieren eines Polynoms im Komplexen (4 Punkte)

Faktorisieren Sie für $z \in \mathbb{C}$ das Polynom

$$f(z) = 2z^2 - z + 3\,, \tag{1}$$

d.h., finden Sie $a, b, c \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = a(z-b)(z-c)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Finden Sie die Nullstellen von $f(z)$.

Aufgabe 3 Trigonometrische Identitäten (4 Punkte)

Benutzen Sie die Euler Formel um für $x \in \mathbb{R}$ folgende Gleichungen zu zeigen:

$$1 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2\,, \tag{3}$$
$$\cos(x)^2 = \cos(2x) + \sin(x)^2\,, \tag{4}$$
$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)\,. \tag{5}$$

Hinweis: Aus der Taylorreihe der cos und sin folgt $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Aufgabe 4 Satz von Schwarz (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$f_{12} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)\,, \tag{6}$$

und

$$f_{21} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) \tag{7}$$

für

a)

$$f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2) \tag{8}$$

b)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für}(x_1, x_2) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für}(x_1, x_2) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Warum ist $f_{12} \neq f_{21}$ im Fall b)?

Aufgabe 5 Reihenentwicklung in zwei Variablen (4 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x, y) = \exp\left(-x^2 - 2y^2 + 2xy - x\right) \tag{10}$$

zur zweiten Ordnung um $(x, y) = (0, 0)$, d.h., finden Sie $a_{xx}, a_{xy}, a_{yy}, b_x, b_y, c \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x, y) = a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{xy}xy + b_x x + b_y y + c + \mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(y^3) + \mathcal{O}(x^2 y) + \mathcal{O}(xy^2)\,. \tag{11}$$