

Tensorprodukt von Vektorräumen

19. Juni 2026

1 Endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt

Wir definieren zuerst einen K -Vektorraum V , welcher durch Basisvektoren $|b\rangle$ mit $b \in B_V$ aufgespannt wird. Wir schreiben

$$V = \text{Span}_K\{|b\rangle | b \in B_V\} \quad (1)$$

mit $\text{Dim}V = |B_V|$. Wir schränken uns in dieser Zusammenfassung auf $\text{Dim}V \in \mathbb{N}$ ein. Für jeden Vektor $|v\rangle \in V$ gibt es also eine eindeutige Linearkombination

$$|v\rangle = \sum_{b \in B_V} v_b |b\rangle \quad (2)$$

mit $v_b \in K$ und Körper K . Auf dem Vektorraum sei noch ein Skalarprodukt definiert bzgl. dem die Basisvektoren orthonormiert sind, d.h.,

$$\langle b|b'\rangle = \delta_{b,b'} \quad (3)$$

mit Kronecker Delta $\delta_{b,b'}$ und $\delta_{b,b} = 1$ und $\delta_{b,b'} = 0$ für $b \neq b'$. Für $|v\rangle, |w\rangle \in V$ folgt

$$\langle v|w\rangle = \sum_{b,b' \in B_V} v_b^* w_{b'} \langle b|b'\rangle = \sum_{b \in B_V} v_b^* w_b \quad (4)$$

mit komplexer Konjugation $*$ definiert auf K .

Für einen solchen Vektorraum existiert eine Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{b \in B_V} |b\rangle \langle b| = \mathbb{1}, \quad (5)$$

da

$$\left(\sum_{b \in B_V} |b\rangle \langle b| \right) |v\rangle = \sum_{b \in B_V} |b\rangle \langle b|v\rangle = \sum_{b,b' \in B_V} |b\rangle \langle b|b'\rangle v_{b'} \quad (6)$$

$$= \sum_{b,b' \in B_V} |b\rangle \delta_{b,b'} v_{b'} = \sum_{b \in B_V} |b\rangle v_b = |v\rangle \quad (7)$$

für jeden $|v\rangle \in V$.

Für jede lineare Abbildung $M : V \rightarrow V, |v\rangle \mapsto M|v\rangle$ kann daher geschrieben werden

$$M|v\rangle = \sum_{b,b' \in B_V} |b\rangle \langle b|M|b'\rangle \langle b'|v\rangle \quad (8)$$

$$= \sum_{b,b' \in B_V} |b\rangle M_{b,b'} v_{b'} \quad (9)$$

mit Matrixelement $M_{b,b'} \equiv \langle b|M|b'\rangle$. Falls die Indexmenge $B_V = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann sind b und b' der Zeilen- und Spaltenindex der Matrix.

2 Notation des Tensorproduktraums

Wir definieren nun $V \otimes W$ für zwei solche K -Vektorräume V und W als

$$V \otimes W = \text{Span}_K \left\{ |b\rangle \otimes |b'\rangle \mid b \in B_V \wedge b' \in B_W \right\} \quad (10)$$

mit Symbolen $|b\rangle \otimes |b'\rangle$, die die Basisvektoren des Produktraums definieren.

Wir definieren zunächst das Skalarprodukt zweier Basisvektoren

$$(\langle b_1 | \otimes \langle b_2 |)(|b'_1\rangle \otimes |b'_2\rangle) = \langle b_1 | b'_1\rangle \langle b_2 | b'_2\rangle = \delta_{b_1, b'_1} \delta_{b_2, b'_2} \quad (11)$$

mit $b_1, b'_1 \in B_V$ und $b_2, b'_2 \in B_W$.

Für einen Vektor $|a\rangle \in V \otimes W$ gilt

$$|a\rangle = \sum_{b_a \in B_V, b'_a \in B_W} |b_a\rangle \otimes |b'_a\rangle a_{b_a, b'_a} \quad (12)$$

mit

$$a_{b_a, b'_a} = (\langle b_a | \otimes \langle b'_a |) |a\rangle \quad (13)$$

und für das Skalarprodukt mit einem Vektor $|c\rangle \in V \otimes W$ gilt

$$\langle a | c \rangle = \sum_{b_a, b_c \in B_V, b'_a, b'_c \in B_W} (\langle b_a | \otimes \langle b'_a |)(|b_c\rangle \otimes |b'_c\rangle) a_{b_a, b'_a}^* c_{b_c, b'_c} \quad (14)$$

$$= \sum_{b_a \in B_V, b'_a \in B_W} a_{b_a, b'_a}^* c_{b_a, b'_a} \cdot \quad (15)$$

Für einen linearen Operator zusammengesetzt aus einem $A : V \rightarrow V$ und einem $B : W \rightarrow W$ ist

$$(A \otimes B) |a\rangle = \sum_{b_a \in B_V, b'_a \in B_W} (A \otimes B)(|b_a\rangle \otimes |b'_a\rangle) a_{b_a, b'_a} \quad (16)$$

$$= \sum_{b_a \in B_V, b'_a \in B_W} (A |b_a\rangle) \otimes (B |b'_a\rangle) a_{b_a, b'_a} \quad (17)$$

definiert, wobei wir hier

$$|a\rangle \otimes |c\rangle \quad (18)$$

für beliebige nicht-Basisvektoren $|a\rangle$ und $|c\rangle$ über die Linearkombination der Basisvektoren definieren, d.h.,

$$|a\rangle \otimes |c\rangle = \sum_{b \in B_V, b' \in B_W} \langle b | a \rangle \langle b' | c \rangle |b\rangle \otimes |b'\rangle \cdot \quad (19)$$