Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2026
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Riccardo Costantini, Lucia Gibelli, Lea Kutsch, Florian Schöppl

# Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
# Blatt 9 (abzugeben am 24. Juni)

---

## Aufgabe 1 Virialsatz (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$2 \langle\psi| T |\psi\rangle = \langle\psi| \hat{x}V'(\hat{x}) |\psi\rangle \tag{1}$$

für einen stationären Zustand $|\psi\rangle$ des Hamiltonian

$$H = T(\hat{p}) + V(\hat{x}) \tag{2}$$

mit

$$T(\hat{p}) \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m}\,. \tag{3}$$

## Aufgabe 2 Clebsch-Gordan Koeffizienten (12 Punkte)

Berechnen Sie mit dem weiter unten angegebenen Algorithmus (wird am 19.6. in der Vorlesung besprochen) die Clebsch-Gordan Koeffizienten für $j_1 = 1$ und $j_2 = 1/2$.

### Algorithmus zur Berechnung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

a) Aufgabe: Suche die CGK in

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1,m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK)}} \tag{4}$$

b) Bestimme die Maximalwerte von $m$ und $j$:

$$m_{\max} = (m_1)_{\max} + (m_2)_{\max} = j_1 + j_2 = j_{\max} \tag{5}$$

dafür gibt es in (4) nur einen möglichen Beitrag:

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1 j_1 j_2 j_2\rangle = |j_1 j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle \tag{6}$$

der CGK

$$\langle j_1, j_1, j_2, j_2 | j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = 1 \tag{7}$$

damit der Zustand normiert ist (modulo Phase).

c) Wende $J_-$ mit

$$\hat{J}_\pm \left|jm\right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\left|j,m\pm 1\right\rangle \tag{8}$$

auf den höchsten Zustand an:

$$\begin{aligned}
&J_- \left|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2\right\rangle && (9)\\
&= (J_-^{(1)}\left|j_1 j_1\right\rangle)\otimes\left|j_2 j_2\right\rangle + \left|j_1 j_1\right\rangle\otimes(J_-^{(2)}\left|j_2 j_2\right\rangle) && (10)\\
&= \sqrt{2j_1}\left|j_1,j_1-1\right\rangle\otimes\left|j_2 j_2\right\rangle + \sqrt{2j_2}\left|j_1 j_1\right\rangle\otimes\left|j_2,j_2-1\right\rangle && (11)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&J_- \left|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2\right\rangle && (12)\\
&= \sqrt{2(j_1+j_2)}\left|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2-1\right\rangle . && (13)
\end{aligned}$$

Daraus kann man zwei CGK ablesen:

$$\left\langle j_1,j_1-1,j_2,j_2|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2-1\right\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\,, \tag{14}$$

$$\left\langle j_1,j_1,j_2,j_2-1|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2-1\right\rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\,. \tag{15}$$

Durch wiederholtes Anwenden von $J_-$ erniedrigt man $m$ und findet alle weiteren CGK für $j_{\max} = j_1 + j_2$.

d) betrachte nun den Gesamtspin-Zustand mit dem nächstniedrigeren $j$ Wert, d.h., $j = j_1 + j_2 - 1$ und den Maximalwert von $m$ für dieses $j$: $\left|j_1,j_2,j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\right\rangle$

- wegen $m_1+m_2 = m$ kann sich der Zustand nur aus Produktzuständen $\left|j_1,j_1-1,j_2,j_2\right\rangle$ und $\left|j_1,j_1,j_2,j_2-1\right\rangle$ zusammensetzen
- außerdem muss der Zustand orthogonal zu $\left|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2-1\right\rangle$ sein, der aus denselben Produktzuständen zusammengesetzt ist

Da der Unterraum nur zweidimensional ist bleibt nur eine Möglichkeit (bis auf Phase):

$$\begin{aligned}
&\left|j_1,j_2,j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\right\rangle && (16)\\
&= \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\left|j_1,j_1-1,j_2,j_2\right\rangle && (17)\\
&\quad - \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\left|j_1,j_1,j_2,j_2-1\right\rangle . && (18)
\end{aligned}$$

Das liefert die ersten beiden CGK für $j = j_1 + j_2 - 1$, die weiteren findet man wieder durch Anwendung von $J_-$.

e) der nächste Wert von $j$ ist $j = j_1 + j_2 - 2$:

- der Zustand mit $m = j_1 + j_2 - 2$ ist eine Superposition von 3 Produktzuständen
- die drei CGK können bestimmt werden durch Orthogonalität zu bereits bekannten Zuständen mit gleichem $m$ aber $j = j_1 + j_2$ und $j = j_1 + j_2 - 1$ und einer Normierung auf 1.
- die kleineren $m$ Werte erhält man wieder durch Anwendung von $J_-$

f) Verfahre so, bis $j = j_1 - j_2$ erreicht ist.