Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2026
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Riccardo Costantini, Lucia Gibelli, Lea Kutsch, Florian Schöppl

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 8 (abzugeben am 17. Juni)

Aufgabe 1 Pauli Matrizen (5 Punkte)

Wir definieren

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\hbar\varepsilon_{abc}\hat{S}_c$ und $\hat{S}_i \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ mit Pauli Matrizen σ_i.
Zeigen Sie:

a) $(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$ für jeden Einheitsvektor $\hat{n}$

b) Für Vektoroperatoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ mit $[A_i, B_j] = 0$ gilt

$$(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})\mathbb{1} + i(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{\sigma}\,. \tag{4}$$

c) Für den Spin-Rotations-Operator gilt:

$$U(R(\vec{\theta})) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{S}} \tag{5}$$

$$= \cos(\theta/2)\mathbb{1} - i\sin(\theta/2)\hat{\theta}\cdot\vec{\sigma} \tag{6}$$

Aufgabe 2 Spin Präzession im Magnetfeld (8 Punkte)

Der Zeitentwicklungsoperator sei gegeben durch

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{WW}t} \tag{7}$$

mit

$$H_{WW} = -\gamma\vec{B}\cdot\hat{\vec{S}}\,. \tag{8}$$

Wir nehmen nun ein Magnetfeld in die z-Richtung an $\vec{B} = B\hat{z}$. Was ist der Erwartungswert von $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$ zur Zeit t mit Anfangszustand

$$\psi(t=0) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Das ist der $|\uparrow\rangle$ Eigenzustand von $\hat{S}_z$. Wie ändert sich die Antwort, wenn wir den Anfangszusand in

$$\psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \tag{10}$$

verändern? Das ist der $\hbar/2$ Eigenzustand von $\hat{S}_x$.

Aufgabe 3 Kopplung zweier Spin-1/2 Systeme (7 Punkte)

Es sei $V^{(a)}$ der Vektorraum in dem die Spin-Matrizen $S_i^{(a)}$ wirken. Der Index $i = 1, 2, 3$ zählt wieder die drei Raum-Dimensionen ab. Der Index a zählt die verschiedenen Vektorräume ab. Betrachten wir nun ein System zweier gekoppelter Spin-1/2 Systeme mit Operator

$$J_i \equiv S_i^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes S_i^{(2)} \,. \tag{11}$$

Finden Sie eine Matrixdarstellung von J_3 in der Basis

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \;, \quad |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \;, \quad |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \;, \quad |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \;. \tag{12}$$

Berechnen Sie nun die Matrix für $\vec{J}^2$, finden Sie eine Basis in der diese diagonal ist und lesen Sie die Dimension des $j = 1$ und $j = 0$ Unterraums ab.