

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 6 (abzugeben am 3. Juni)

Aufgabe 1 Erhaltungsgrößen in der Quantenmechanik (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für Hermitesche Operatoren G mit $[H, G] = 0$ und Eigenwertgleichung

$$G |n\rangle = \lambda_n |n\rangle \quad (1)$$

gilt, dass

$$\frac{d}{dt} |\langle n | \psi(t) \rangle| = 0 \quad (2)$$

für beliebigen Zustand $|\psi(t)\rangle$. (Nehmen sie an, dass der Eigenraum von G nicht entartet ist.)

Aufgabe 2 Drehimpuls Algebra (8 Punkte)

Wir untersuchen den Drehimpulsoperator mit Komponenten

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k, \quad (3)$$

$i \in \{1, 2, 3\}$ mit Hermiteschen Orts- und Impulsoperatoren mit Vertauschungsrelation

$$[\hat{x}_a, \hat{p}_b] = \begin{cases} i\hbar & \text{falls } a = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4)$$

Zeigen Sie:

- a) $\hat{L}_a^\dagger = \hat{L}_a$
- b) $[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{L}_c$
- c) $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$ für $\hat{L}^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{L}_i^2$

Aufgabe 3 Drehimpuls generiert Rotation (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$U_R(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\theta} \cdot \hat{L}} \quad (5)$$

eine Rotation um die Achse $\hat{\theta}$ mit Winkel $|\theta|$ bewirkt.

Aufgabe 4 Auf- und Absteigeoperatoren (5 Punkte)

Wir definieren die Operatoren

$$\hat{L}_{\pm} \equiv \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2. \quad (6)$$

Zeigen Sie, dass wenn

$$\hat{L}_3 |l\rangle = l |l\rangle \quad (7)$$

gilt, dass dann auch

$$\hat{L}_3 \hat{L}_{\pm} |l\rangle = (l \pm \hbar) \hat{L}_{\pm} |l\rangle \quad (8)$$

gilt.

Aufgabe 5 Drehimpulsoperator im Ortsraum (5 Punkte)

Zeige

$$\langle r, \varphi, \theta | \hat{L}_3 | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle r, \varphi, \theta | \psi \rangle \quad (9)$$

mit Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (10)$$