Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2026
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Riccardo Costantini, Lucia Gibelli, Lea Kutsch, Florian Schöppl

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I

Blatt 5 (abzugeben am 27. Mai)

Aufgabe 1 Teilchen im elektromagnetischen Feld (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die klassichen Bewegungsgleichungen der Hamilton Funktion

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}))^2 + q\phi(\vec{x}) \tag{1}$$

mit Vektorpotential $\vec{A}$, Skalarpotential ϕ und

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3}$$

zur Lorentzkraft

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{4}$$

mit $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x}$ führen.
Man erhält die Hamiltonfunktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld also durch die Ersetzung

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A} \tag{5}$$

und

$$V(\vec{x}) \to V(\vec{x}) + q\phi(\vec{x})\,. \tag{6}$$

Diese Ersetzung nennt man auch minimale Kopplung.
Hinweis: verwenden Sie $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$.

Aufgabe 2 Gebundene Zustände in 1d (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass in einer Dimension gebundene Zustände nie entartet sind. **Hinweis:** nehmen Sie an, dass es zwei Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 gibt, die die SGL im Ortsraum zur gleichen Energie E lösen. Zeigen Sie dann unter Verwendung des Verschwindens der Wellenfunktionen im Unendlichen, dass $\psi_1 = e^{i\alpha}\psi_2$ mit Konstanter α.

Aufgabe 3 Reelle Eigenfunktionen in Ortsbasis (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen von $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ in der Ortsbasis reell gewählt werden können.

Aufgabe 4 Harmonischer Oszillator im Ortsraum (8 Punkte)

Betrachten Sie die SGL des Harmonischen Oszillators in einer Dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\psi(x)\,. \tag{7}$$

Mit der Variablentransformation

$$y = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{8}$$

lässt sich diese Gleichung umschreiben zu

$$\psi''(y) + (\varepsilon - y^2)\psi(y) = 0 \tag{9}$$

mit $\varepsilon = 2E/(\hbar\omega)$.
Machen Sie den allgemeinen Ansatz

$$\psi(y) = h(y)e^{-y^2/2} \tag{10}$$

und zeigen Sie dann, dass ein Potenzreihenansatz für

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m \tag{11}$$

zu Bedingungen zwischen den Koeffizienten a_m führt.
Wie verhalten sich die Koeffizienten asymptotisch für $m \to \infty$? Vergleichen Sie mit der asymptotischen Form der Koeffizienten für $h(y) = e^{y^2}$. Falls das asymptotische Verhalten eintreten kann ist die Wellenfunktion also nicht normierbar.
Um eine normierbare Wellenfunktion zu finden muss die Potenzreihe also abbrechen, d.h., es muss ein m^* geben mit $a_m = 0$ für alle $m > m^*$. Zeigen Sie dass diese Abbruchbedingung zu einer Energiequantisierung führt.