Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2026
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Riccardo Costantini, Lucia Gibelli, Lea Kutsch, Florian Schöppl

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 3 (abzugeben am 13. Mai)

Aufgabe 1 Unschärferelation Hermitescher Operatoren (10 Punkte)

Zeigen Sie

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} |\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle| \tag{1}$$

mit

$$\Delta\Omega_\psi = \sqrt{\langle\psi|\,(\Omega - \langle\psi|\,\Omega\,|\psi\rangle)^2\,|\psi\rangle}\,. \tag{2}$$

für einen Zustand $|\psi\rangle$ und beliebigen Hermiteschen linearen Operatoren A und B.
Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung $|\langle X|Y\rangle|^2 \leq \langle X|X\rangle\langle Y|Y\rangle$ für entsprechend gewählte $|X\rangle$ und $|Y\rangle$.

Aufgabe 2 Unschärferelation Energie und Zeit (5 Punkte)

Wir definieren eine Zeitunschärfe Δt_A für einen Operator A mittels

$$\Delta A_\psi = \left|\frac{d}{dt}\langle\psi|\,A\,|\psi\rangle\right| \Delta t_{A_\psi}\,, \tag{3}$$

wobei ΔA_ψ in Gleichung (2) definiert ist. Dieser Begriff der Zeitunschärfe besagt also wie lange es dauert bis sich der Erwartungswert eine Standardabweichung verändert.
Verwenden Sie das Ehrenfest Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\,A\,|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\,[A,H]\,|\psi\rangle \tag{4}$$

für einen nicht explizit zeitabhängigen Operator A mit Hamiltonoperator H um zu zeigen, dass unabhangig von A und $|\psi\rangle$ gilt

$$\Delta H \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}\,, \tag{5}$$

wobei ΔH auch in Gleichung (2) definiert ist.
Dazu ist es auch nützlich das Ergebnis der ersten Aufgabe zu verwenden.

Aufgabe 3 Inkompatible Variablen (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei Hermitesche Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{6}$$

Die Eigenvektoren von σ_x sind

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,. \tag{7}$$

Nach einer ersten Messung befinde sich das System im Eigenzustand von σ_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer darauf folgenden Messung von σ_x der $+1$ bzw. der -1 Eigenwert gemessen? Wird im Anschluss daran noch ein drittes Mal gemessen, dieses Mal σ_z, mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man dann das System im Eigenzustand $|\uparrow\rangle$?