

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I

Zentralübung am 18. Juli

Aufgabe 1 Spin 1 (10 Punkte)

Für einen Spin 1 Zustand kann man zeigen, dass

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Wir nehmen nun an, dass sich ein Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

befindet. In welchem Zustand ist das System zur Zeit t mit Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t B S_x} \quad (3)$$

mit $t, B \in \mathbb{R}$. Finde einen geschlossenen Ausdruck.

Lösung: Wir finden zunächst, dass

$$S_x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und daher $S_x^n v = \hbar^n v$ mit

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Daraus folgt

$$U(t)v = e^{-itB}v. \quad (6)$$

Aufgabe 2 Basis-Rotation eines einfachen Hamiltonians (10 Punkte)

Wir betrachten einen allgemeinen Hamiltonian eines zwei-Zustandssystems

$$H_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit $A, D \in \mathbb{R}$ and $B \in \mathbb{C}$. Wir führen nun als kleine Störung eine Basisrotation durch, d.h.,

$$H = V \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} V^\dagger \quad (8)$$

mit

$$V = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Was ist der Störterm $H_1 = H - H_0$ zu führender Ordnung in θ ? Wie verändert sich das Spektrum von H im Vergleich zu H_0 ?

Lösung: In linearer Näherung:

$$H_1 = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$= \theta \begin{pmatrix} B^* & D \\ -A & -B \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & B^* \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} B^* + B & D - A \\ D - A & -B - B^* \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Die Eigenwerte sind zu allen Ordnungen in θ unverändert, da die Eigenwertgleichung $Hv = Ev = VH_0V^\dagger v$ umgeschrieben werden kann als $EV^\dagger v = H_0V^\dagger v$, d.h., $V^\dagger v$ ist zum gleichen Eigenwert E ein Eigenwert von H_0 .

Aufgabe 3 Zeitentwicklung im Potentialtopf (10 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen in einer Dimension mit Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq l, \\ \infty & \text{für } |x| > l \end{cases} \quad (12)$$

mit normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators im Bereich $|x| \leq l$ gegeben durch

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \begin{cases} \cos(k_n x) & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin(k_n x) & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (13)$$

mit $k_n = \frac{n\pi}{2l}$. Für $|x| > l$ ist $\psi_n(x) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System nun in der Wellenfunktion

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{l^3}} x & \text{für } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (14)$$

Bestimmen Sie c_n in

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{n=1,2,3,4,\dots} c_n \psi_n(x) \quad (15)$$

als geschlossenen Ausdruck.

Lösung: Da der Hamilton Operator Hermiteisch ist sind die Eigenfunktionen orthogonal. Da sie auch normiert sind, sind sie orthonormal. Daher gilt

$$c_n = \int_{-l}^l dx \psi_n(x)^* \psi(x, t = 0) \quad (16)$$

$$= \int_{-l}^l dx \psi_n(x) \psi(x, t = 0). \quad (17)$$

Die Integrale lassen sich zusammensetzen aus

$$f(k) = \int_{-l}^l dx e^{ikx} \psi(x, t=0) \quad (18)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{l^3}} \int_0^l dx e^{ikx} x \quad (19)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{l^3}} \int_0^l dx (-i\partial_k) e^{ikx} \quad (20)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{l^3}} (-i\partial_k) \int_0^l dx e^{ikx} \quad (21)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{l^3}} (-i\partial_k) \frac{1}{ik} (e^{ikl} - 1) \quad (22)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{l^3}} \left(\frac{e^{ikl} - 1}{k^2} - \frac{ile^{ikl}}{k} \right). \quad (23)$$

Es gilt also für die ungeraden n

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{1}{2} (f(k) + f(-k)) \quad (24)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{l^2} \frac{1}{2} (f(k) + f(-k)) \quad (25)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{l^2} \frac{\cos(kl) - 1 + kl \sin(kl)}{k^2} \quad (26)$$

und für gerade n

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{1}{2i} (f(k) - f(-k)) \quad (27)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{l^2} \frac{-kl \cos(kl) + \sin(kl)}{k^2}. \quad (28)$$