

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I

Zentralübung am 11. Juli

Aufgabe 1 Harmonischer Oszillator in d Dimensionen (10 Punkte)

Betrachte einen harmonischen Oszillator in d Dimensionen mit

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (1)$$

Welche Eigenwerte besitzt dieser Hamiltonian? Die Eigenwerte seien nun geordnet, d.h., $E_0 < E_1 < \dots$. Berechnen Sie die Entartung für E_0, E_1, E_2 .

Lösung: Betrachte System als Summe von 1d HO. Energien:

$$E_{\vec{n}} = \frac{d}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\left(\sum_{i=1}^d n_i\right). \quad (2)$$

Definieren $n = \sum_{i=1}^d n_i$.

Entartung: $n = 0$ hat nur eine Kombination $\vec{n} = 0$. $n = 1$ hat d Kombinationen $1, 0, 0, \dots$; $0, 1, 0, 0, \dots$; etc. $n = 2$ hat d Kombinationen mit Wert 2 wie oben und $d(d-1)/2$ Kombinationen mit zwei Werten 1. Daher ist die Entartung von $n = 2$ gleich $d + d(d-1)/2 = d(d+1)/2$.

Aufgabe 2 Unschärferelation (10 Punkte)

Gegeben sei

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l}}\Theta(l^2 - x^2) \quad (3)$$

mit $l \in \mathbb{R}^+$ und $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$. Berechnen Sie die Standardabweichung (Unschärfe) Δx und die Wellenfunktion im Impulsraum $\langle p|\psi\rangle$. Berechnen Sie dann auch den Erwartungswert $\langle \hat{p}^2\rangle$ für diesen Zustand.

Sie dürfen verwenden, dass

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}xp} \quad (4)$$

Lösung: Ortsunschärfe:

$$\langle x\rangle = \int dx |\langle x|\psi\rangle|^2 x = 0, \quad (5)$$

$$\langle x^2\rangle = \int dx |\langle x|\psi\rangle|^2 x^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx x^2 \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2l} \frac{2}{3} l^3 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{3} l^2. \quad (9)$$

Daher ist

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}}l. \quad (10)$$

Impulsraum:

$$\langle p|\psi\rangle = \int dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2l}} \int dx e^{\frac{i}{\hbar}xp} \Theta(l^2 - x^2) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4l\pi\hbar}} \int_{-l}^l dx e^{\frac{i}{\hbar}xp} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4l\pi\hbar}} \frac{\hbar}{ip} (e^{\frac{i}{\hbar}lp} - e^{-\frac{i}{\hbar}lp}) \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{l\pi\hbar}} \frac{\hbar}{p} \sin\left(\frac{1}{\hbar}lp\right). \quad (15)$$

Wegen Symmetrie: $\langle p\rangle = 0$. Dann:

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar}{l\pi} \int dp \sin\left(\frac{1}{\hbar}lp\right)^2 = \infty. \quad (16)$$

Daher $\Delta p = \infty$. (Integral ueber eine positive Funktion von $-\infty$ nach ∞ .)