Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2025
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Maximilian Fürst, Fabian Haneder, Lukas Beringer, Gusthavo Brizolla, Raphael Lehner

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Zentralübung am 4. Juli

Aufgabe 1 Zweizustandssystem

Betrachte ein Zweizustandssystem mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0^{(0)} & 0 \\ 0 & E_1^{(1)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

in der Basis $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit

$$H_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle \ . \tag{2}$$

Ein allgemeiner Störterm

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

wird nun hinzugefügt, so dass $H = H_0 + H_1$. Was sind die exakten Energien des gestörten Systems? Zeigen Sie, dass eine allgemeine Störung zur Vergrößerung des Abstands der Energien führt. Berechnen Sie nun die Energien des gestörten Systems mit Hilfe der Störungstheorie und $E_n^{(1)} = \langle n| H_1 |n\rangle$ und

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k| H_1 |n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \ . \tag{4}$$

Bonus: zeigen Sie, dass die Taylor Entwicklung der exakten gestörten Energie mit der Störungstheorie übereinstimmt.
Lösung: Neue Energien:

$$0 = \det(H - \lambda) = (E_0^{(0)} - \lambda)(E_1^{(0)} - \lambda) - |\Delta|^2 \tag{5}$$

$$\lambda^2 - \lambda(E_0^{(0)} + E_1^{(0)}) - \Delta_0\Delta_1 + E_0^{(0)} E_1^{(1)} \ . \tag{6}$$

Daher

$$\lambda_\pm = \frac{E_0^{(0)} + E_1^{(0)} \pm \sqrt{(E_0^{(0)} + E_1^{(0)})^2 + 4|\Delta|^2 - 4E_0^{(0)} E_1^{(1)}}}{2} \tag{7}$$

$$= \frac{E_0^{(0)} + E_1^{(0)} \pm \sqrt{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2 + 4|\Delta|^2}}{2} \ . \tag{8}$$

Der Abstand der Energien verändert sich von $\sqrt{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2}$ durch die Störung zu $\sqrt{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2 + 4|\Delta|^2}$, was immer größer ist.
Nun

$$E_n^{(1)} = 0 \tag{9}$$

und

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} |\Delta|^2 = -E_1^{(2)} \,. \tag{10}$$

Die Taylor Entwicklung von $\sqrt{1+x} = 1 + (1/2)x + O(x^2)$ und daher

$$\frac{1}{2}\sqrt{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2 + 4|\Delta|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2}\sqrt{1 + \frac{4|\Delta|^2}{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2}} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}|E_0^{(0)} - E_1^{(0)}| \left(1 + \frac{2|\Delta|^2}{(E_0^{(0)} - E_1^{(0)})^2}\right) + \dots \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}|E_0^{(0)} - E_1^{(0)}| + \frac{|\Delta|^2}{|E_0^{(0)} - E_1^{(0)}|} + \dots \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2}(E_1^{(0)} - E_0^{(0)}) - \frac{|\Delta|^2}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} + \dots \tag{14}$$

falls $E_1^{(0)} > E_0^{(1)}$. Da bei $\Delta = 0$, $\lambda_+ = E_0^{(1)}$ stimmt die Taylor Entwicklung mit der allgemeinen Formel überein.