

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 10 (abzugeben am 28. Juni)

Aufgabe 1 Pauli Matrizen (5 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$ für jeden Einheitsvektor \hat{n}
b) Für Vektoroperatoren \vec{A} und \vec{B} mit $[A_i, B_j] = 0$ gilt

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\mathbb{1} + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}. \quad (1)$$

- c) Für den Spin-Rotations-Operator gilt:

$$U(R(\vec{\theta})) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \vec{S}} \quad (2)$$

$$= \cos(\theta/2)\mathbb{1} - i \sin(\theta/2)\hat{\theta} \cdot \vec{\sigma} \quad (3)$$

Aufgabe 2 Spin Präzession im Magnetfeld (8 Punkte)

Der Zeitentwicklungsoperator sei gegeben durch

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{WW}t} \quad (4)$$

mit

$$H_{WW} = -\gamma\vec{B} \cdot \hat{S}. \quad (5)$$

Wir nehmen nun ein Magnetfeld in die z-Richtung an $\vec{B} = B\hat{z}$. Was ist der Erwartungswert von \hat{S}_x , \hat{S}_y und \hat{S}_z zur Zeit t mit Anfangszustand

$$\psi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Das ist der $|\uparrow\rangle$ Eigenzustand von \hat{S}_z . Wie ändert sich die Antwort, wenn wir den Anfangszustand in

$$\psi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

verändern? Das ist der $\hbar/2$ Eigenzustand von \hat{S}_x .

Aufgabe 3 Kopplung zweier Spin-1/2 Systeme (7 Punkte)

Es sei $V^{(a)}$ der Vektorraum in dem die Spin-Matrizen $S_i^{(a)}$ wirken. Der Index $i = 1, 2, 3$ zählt wieder die drei Raum-Dimensionen ab. Der Index a zählt die verschiedenen Vektorräume ab. Betrachten wir nun ein System zweier gekoppelter Spin-1/2 Systeme mit Operator

$$J_i \equiv S_i^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes S_i^{(2)}. \quad (8)$$

Finden Sie eine Matrixdarstellung von J_3 in der Basis

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle. \quad (9)$$

Berechnen Sie nun die Matrix für \vec{J}^2 , finden Sie eine Basis in der diese diagonal ist und lesen Sie die Dimension des $j = 1$ und $j = 0$ Unterraums ab.