Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2023
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Bashap Dey, Andreas Hackl, Daniel Knüttel, Adrian Seith, Torsten Weber

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 9 (abzugeben am 21. Juni)

Aufgabe 1 Harmonischer Oszillator in 3d in Kugelkoordinaten (10 Punkte)

Wir betrachten den harmonischen Oszillator in drei Dimensionen in Kugelkoordinaten:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \,. \tag{1}$$

a) Machen Sie einen Separationsansatz

$$\psi_{Elm}(r,\theta,\varphi) = \frac{U_{El}(r)}{r} Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{2}$$

und finden Sie die Radialgleichung für U_{El}.

b) Welche Terme dominieren für $r \to \infty$? Zeigen Sie, dass $U \propto e^{-y^2/2}$ mit $y = \sqrt{\mu\omega/\hbar}r$ die Radialgleichung asymptotisch für $r \to \infty$ löst.

c) Machen Sie den Ansatz $U(y) = v(y)e^{-y^2/2}$ und definieren Sie $\varepsilon \equiv 2E/(\hbar\omega)$. Finden Sie die Differentialgleichung für v.

d) Machen Sie den Ansatz

$$v(y) = y^{l+1} \sum_{i=0}^{\infty} C_i y^i \tag{3}$$

und finden Sie eine Rekursionsrelation der C_i.

e) Wie auf Blatt 6 muss die Potenzreihe abbrechen. Was folgt für die Energieniveaus? Setzen Sie die Hauptquantenzahl n aus der Vorlesung zu l in Beziehung.

Aufgabe 2 Runge-Lenz Vektor (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den quantenmechanischen Runge-Lenz Vektor

$$\hat{N}_i \equiv \frac{1}{2\mu}\varepsilon_{ijk}(\hat{p}_j\hat{L}_k + \hat{L}_k\hat{p}_j) - \frac{e^2 x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} \tag{4}$$

mit

$$\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} \,, \tag{5}$$

$$\hat{L}_k = \varepsilon_{klm} x_l \hat{p}_m \tag{6}$$

und den Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}^2 - \frac{e^2}{r} \,. \tag{7}$$

des Wasserstoffatoms gilt

$$[H, \hat{N}_i] = 0 \,. \tag{8}$$