

## Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I Blatt 6 (abzugeben am 31. Mai)

---

### Aufgabe 1 Teilchen im elektromagnetischen Feld (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die klassischen Bewegungsgleichungen der Hamilton Funktion

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}))^2 + q\phi(\vec{x}) \quad (1)$$

mit Vektorpotential  $\vec{A}$ , Skalarpotential  $\phi$  und

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

zur Lorentzkraft

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4)$$

mit  $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{x}$  führen.

Man erhält die Hamiltonfunktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld also durch die Ersetzung

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad (5)$$

und

$$V(\vec{x}) \rightarrow V(\vec{x}) + q\phi(\vec{x}). \quad (6)$$

Diese Ersetzung nennt man auch minimale Kopplung.

**Hinweis:** verwenden Sie  $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$ .

### Aufgabe 2 Gebundene Zustände in 1d (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass in einer Dimension gebundene Zustände nie entartet sind. **Hinweis:** nehmen Sie an, dass es zwei Wellenfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  gibt, die die SGL im Ortsraum zur gleichen Energie  $E$  lösen. Zeigen Sie dann unter Verwendung des Verschwindens der Wellenfunktionen im Unendlichen, dass  $\psi_1 = e^{i\alpha}\psi_2$  mit Konstanter  $\alpha$ .

### Aufgabe 3 Reelle Eigenfunktionen in Ortsbasis (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen von  $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$  in der Ortsbasis reell gewählt werden können.

#### Aufgabe 4 Harmonischer Oszillator im Ortsraum (8 Punkte)

Betrachten Sie die SGL des Harmonischen Oszillators in einer Dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \quad (7)$$

Mit der Variablentransformation

$$y = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (8)$$

lässt sich diese Gleichung umschreiben zu

$$\psi''(y) + (\varepsilon - y^2)\psi(y) = 0 \quad (9)$$

mit  $\varepsilon = 2E/(\hbar\omega)$ .

Machen Sie den allgemeinen Ansatz

$$\psi(y) = h(y)e^{-y^2/2} \quad (10)$$

und zeigen Sie dann, dass ein Potenzreihenansatz für

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m \quad (11)$$

zu Bedingungen zwischen den Koeffizienten  $a_m$  führt.

Wie verhalten sich die Koeffizienten asymptotisch für  $m \rightarrow \infty$ ? Vergleichen Sie mit der asymptotischen Form der Koeffizienten für  $h(y) = e^{y^2}$ . Falls das asymptotische Verhalten eintreten kann ist die Wellenfunktion also nicht normierbar.

Um eine normierbare Wellenfunktion zu finden muss die Potenzreihe also abbrechen, d.h., es muss ein  $m^*$  geben mit  $a_m = 0$  für alle  $m > m^*$ . Zeigen Sie dass diese Abbruchbedingung zu einer Energiequantisierung führt.