Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2023
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Bashap Dey, Andreas Hackl, Daniel Knüttel, Adrian Seith, Torsten Weber

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 5 (abzugeben am 24. Mai)

Aufgabe 1 Parität (8 Punkte)

Wir definieren den Paritätsoperator $\hat{P}$ durch

$$\hat{P}\,|x\rangle = |-x\rangle \tag{1}$$

mit Eigenzustand $|x\rangle$ des Ortsoperators $\hat{x}$.

a) Zeigen Sie, dass daraus

$$\hat{P}\,|p\rangle = |-p\rangle \tag{2}$$

für Eigenzustände $|p\rangle$ des Impulsoperators $\hat{p}$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{P}\hat{x}\hat{P} = -\hat{x} \tag{3}$$

und $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$. Analog gilt auch $\hat{P}\hat{p}\hat{P} = -\hat{p}$.

c) Zeigen Sie, dass für einen Hamilton-Operator $H(\hat{x},\hat{p})$ mit $H(\hat{x},\hat{p}) = H(-\hat{x},-\hat{p})$ gilt, dass $[H,\hat{P}] = 0$.

d) Zeigen Sie, dass falls $|E\rangle$ ein Eigenzustand von H zur Energie E ist, dass auch $\hat{P}\,|E\rangle$ ein Eigenzustand von H zur Energie E ist.

Aus dieser Aufgabe folgt, dass für einen solchen Hamiltonian mit Lösungen

$$\psi_E(x) \equiv \langle x|E\rangle \tag{4}$$

auch $\psi_E(-x)$ eine Lösung zur Energie E ist. Man kann also immer zunächst symmetrische $\psi_E^s(x) = \psi_E(x) + \psi_E(-x)$ oder antisymmetrische $\psi_E^a(x) = \psi_E(x) - \psi_E(-x)$ Lösungen suchen.

Aufgabe 2 Endlich hoher Potentialtopf (10 Punkte)

Finden Sie die stationären Lösungen der Schrödingergleichung zur Energie E des im Skript in Kapitel 4.2.1 besprochenen Systems für den Fall, dass V_0 endlich ist und nicht wie in Kapitel 4.2.1 gegen $+\infty$ tendiert. Sie dürfen sich auf den Fall $E < V_0$ beschränken. Fordern Sie zusätzlich zur Stetigkeit der Wellenfunktion auch die Stetigkeit der ersten Ortsableitung. Verwenden Sie die Erkenntnisse aus Aufgabe 1. Es ist ausreichend die Quantisierungsbedingug der Energien implizit in der Form $f(E) = 0$ anzugeben (d.h. finden Sie f).

Aufgabe 3 Stationäre Zustände des freien Teilchens (2 Punkte)

Sie haben bereits auf Blatt 4 die Zeitentwicklung eines freien Teilchens mit Hamiltonian

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{5}$$

untersucht. Geben Sie nun noch die stationären Lösungen der Schrödingergleichung im Ortsraum an. Sind diese normierbar?