

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 3 (abzugeben am 10. Mai)

Aufgabe 1 Unschärferelation Hermitescher Operatoren (8 Punkte)

Zeigen Sie

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle| \quad (1)$$

mit

$$\Delta \Omega_\psi = \sqrt{\langle \psi | (\Omega - \langle \psi | \Omega | \psi \rangle)^2 | \psi \rangle}. \quad (2)$$

für einen Zustand $|\psi\rangle$ und beliebigen Hermiteschen linearen Operatoren A und B .

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung $|\langle X|Y\rangle|^2 \leq \langle X|X\rangle \langle Y|Y\rangle$ für entsprechend gewählte $|X\rangle$ und $|Y\rangle$.

Aufgabe 2 Unschärferelation Energie und Zeit (4 Punkte)

Wir definieren eine Zeitunschärfe Δt_A für einen Operator A mittels

$$\Delta A_\psi = \left| \frac{d}{dt} \langle \psi | A | \psi \rangle \right| \Delta t_{A_\psi}, \quad (3)$$

wobei ΔA_ψ in Gleichung (2) definiert ist. Dieser Begriff der Zeitunschärfe besagt also wie lange es dauert bis sich der Erwartungswert eine Standardabweichung verändert.

Verwenden Sie das Ehrenfest Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | A | \psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [A, H] | \psi \rangle \quad (4)$$

für einen nicht explizit zeitabhängigen Operator A mit Hamiltonoperator H um zu zeigen, dass unabhängig von A und $|\psi\rangle$ gilt

$$\Delta H \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5)$$

wobei ΔH auch in Gleichung (2) definiert ist.

Dazu ist es auch nützlich das Ergebnis der ersten Aufgabe zu verwenden.

Aufgabe 3 Inkompatible Variablen (4 Punkte)

Betrachten Sie zwei Hermitesche Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Die Eigenvektoren von σ_x sind

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Nach einer ersten Messung befinde sich das System im Eigenzustand von σ_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer darauf folgenden Messung von σ_x der +1 bzw. der -1 Eigenwert gemessen? Wird im Anschluss daran noch ein drittes Mal gemessen, dieses Mal σ_z , mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man dann das System im Eigenzustand $|\uparrow\rangle$?

Aufgabe 4 Gausspaket minimiert Unschärfe (4 Punkte)

Berechnen Sie das Produkt $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$ für das Wellenpaket

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi d^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2}{d^2}} \quad (9)$$

mit Breite d .