Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2023
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Bashap Dey, Andreas Hackl, Daniel Knüttel, Adrian Seith, Torsten Weber

Übungen zu Theoretische Physik II - Quantenmechanik I
Blatt 2 (abzugeben am 3. Mai)

Zu allen Aufgaben: verwenden Sie die Dirac Notation um diese zu üben.

Aufgabe 1 Vollständigkeitsrelation (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n\in B} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1} \tag{1}$$

für eine Summe über eine beliebige orthonormale Basis $\{|n\rangle \,|n \in B\}$ eines endlichdimensionalen Vektorraums.

Aufgabe 2 Eigenwerte und Eigenvektoren Hermitescher Operatoren (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Hermitescher Operator nur reelle Eigenwerte hat und dass zwei seiner Eigenvektoren zu je verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 3 Gleichzeitige diagonalisierbarkeit (4 Punkte)

A und B seien zwei kommutierende Hermitesche Operatoren. A sei in einer Basis aus seinen Eigenvektoren diagonal. Die jeweiligen Eigenräume seien eindimensional. Zeigen Sie, dass auch B in dieser Basis diagonal ist.

Aufgabe 4 Baker-Campbell-Hausdorff (4 Punkte)

Zeigen Sie für Operatoren X, Y, dass

$$e^X e^Y = e^Z \tag{2}$$

gelöst wird von

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots \tag{3}$$

wobei die Terme in "..." mindestens drei Faktoren von X bzw. Y haben.

Aufgabe 5 Ort und Impuls (6 Punkte)

Zeigen Sie dass für zwei Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ mit $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ mit Zahl $\hbar$ und Eigenwerten

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \,, \qquad \hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle \tag{4}$$

mit $x, p \in \mathbb{R}$, Vollständigkeitsrelation

$$\int dp\,|p\rangle \langle p| = 1 \tag{5}$$

und Orthogonalitätsbeziehung $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$ gilt, dass

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}xp} \,. \tag{6}$$