

Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik
Blatt 6 (abzugeben am 10. Juni)

Aufgabe 1 Monopol, Dipol, Quadrupol (5 Punkte)

Berechnen Sie die Gesamtladung, das Kartesische Dipolmoment und Quadrupolmoment der Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} \rho(x) = & q_{++}\delta^{(3)}(x - \hat{e}_x - \hat{e}_y) + q_{--}\delta^{(3)}(x + \hat{e}_x + \hat{e}_y) \\ & + q_{+-}\delta^{(3)}(x - \hat{e}_x + \hat{e}_y) + q_{-+}\delta^{(3)}(x + \hat{e}_x - \hat{e}_y) \end{aligned} \quad (1)$$

und

$$\hat{e}_x \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass mit $q_{++} = q_{--} = -q_{+-} = -q_{-+} = 1$ die Gesamtladung und das Dipolmoment verschwindet. Was ist das verbleibende Quadrupolmoment?

Aufgabe 2 Punktladung und Grenzfläche zwischen Dielektrika (10 Punkte)

Gegeben Sei eine Punktladung q am Ort

$$\vec{r}_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ in Medium 1 mit Dielektrizitätskonstante ε_1 und eine ebene Grenzfläche bei $z = 0$ zu Medium 2 mit Dielektrizitätskonstante ε_2 .

Wir machen nun einen Ansatz mit Bildladungen für das Potential in beiden Medien mit

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \Phi^{(1)}(x, y, z) & \text{falls } z > 0 \\ \Phi^{(2)}(x, y, z) & \text{falls } z < 0 \end{cases} \quad (4)$$

mit

$$\Phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_1} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} + \frac{q_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_q|}, \quad (5)$$

$$\Phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{q_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}. \quad (6)$$

a) Zeigen Sie, dass aus den Randbedingungen an den Grenzflächen ohne Oberflächenladung folgt

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad (7)$$

$$q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q. \quad (8)$$

b) Berechnen Sie die induzierte Polarisationsflächenladungsdichte

$$\sigma^P(x, y) = \hat{n}_\perp \cdot (\vec{P}^{(2)}(x, y, 0) - \vec{P}^{(1)}(x, y, 0)). \quad (9)$$

c) Berechnen Sie die gesamte induzierte Polarisationsladung

$$q_{\text{induziert}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma^P(x, y). \quad (10)$$

d) Berechnen Sie die Polarisationsladungsdichte

$$\rho^P(\vec{r}) = -\nabla \cdot P^{(1)}(\vec{r}) \quad (11)$$

für $z > 0$.

e) Berechnen Sie die im ganzen \mathbb{R}^3 induzierte Polarisationsladung.