

**Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik**  
**Blatt 5 (abzugeben am 3. Juni)**

---

**Aufgabe 1 Punktladung über isolierter Metallkugel (4 Punkte)**

Wir definieren wieder eine Metallkugel auf dem Volumen

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R \right\} \quad (1)$$

mit  $R \in \mathbb{R}^+$  und diskutieren ein Randwertproblem mit  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ . Die Metallkugel sei isoliert und habe eine Gesamtladung  $Q$ . Gegeben sei auch noch eine Punktladung  $q$  am Ort  $r_q \in V$ . Im Unterschied zur geerdeten Kugel des Übungsblattes 4, gilt in diesem Fall die Randbedingung für das Potential  $\Phi$

$$(\forall x \in \partial V)(\Phi(x) = \Phi_0) \quad (2)$$

mit

$$\Phi_0 \equiv \frac{Q - Q_0}{R} \quad (3)$$

und

$$Q_0 \equiv -R \frac{q}{|r_q|} \quad (4)$$

gleich der induzierten Gesamtladung der geerdeten Kugel (siehe Aufgabe 4, Blatt 4). Für  $Q = Q_0$  ergibt sich also wieder der Fall der geerdeten Kugel.

Bestimmen Sie für den allgemeinen Fall  $Q \neq Q_0$  die Ladungsdichte auf  $\partial V$ .

**Aufgabe 2 Kugelkondensator (5 Punkte)**

Wir betrachten nun einen Kugelkondensator mit zwei konzentrischen Kugelschalen  $\Omega_{r_1}$  und  $\Omega_{r_2}$  mit

$$\Omega_r \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r \right\} \quad (5)$$

und  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $r_1 < r_2$  und Ladungsdichte  $\rho$  mit

$$\int_{\Omega_{r_1}} dx \rho(x) = Q = - \int_{\Omega_{r_2}} dx \rho(x) \quad (6)$$

mit  $Q \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie zuerst das elektrische Feld mit dem Satz von Gauss unter Verwendung der Kugelsymmetrie. Bestimmen Sie dann das Potential und die Kapazität des Kondensators.

**Aufgabe 3 Energie des Kondensators (3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass unabhängig von der Geometrie eines Kondensators für den Fall  $N = 2$  (Notation aus der Vorlesung) gilt

$$W = \frac{Q^2}{2C}. \quad (7)$$

#### Aufgabe 4 Legendre Polynome (8 Punkte)

Wir suchen nach Lösungen  $P(x)$  der Differentialgleichung

$$((1-x^2)P'(x))' + l(l+1)P(x) = 0 \quad (8)$$

mit  $l \in \mathbb{N}$ .

a) Verwenden Sie den Potenzreihenansatz

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (9)$$

mit  $a_k \in \mathbb{R}$  um die Differentialgleichung zu lösen und zeigen Sie, dass die Rekursionsbeziehung

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \quad (10)$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass aus der Rekursionsbeziehung folgt, dass  $a_{l+2n} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}^+$ . Für gerade  $l$  muss also  $a_1 = 0$  sein, damit die Potenzreihe abbricht, für ungerade  $l$  muss  $a_0 = 0$  sein, damit die Potenzreihe abbricht. Die Wahl von  $a_0$  bzw.  $a_1$  legt dann nur die Normierung des Polynoms fest.

c) Zeigen Sie nun auch, dass

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l. \quad (11)$$

die Differentialgleichung erfüllt.

d) Verifizieren Sie explizit

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} \Big|_{t=0} \quad (12)$$

für  $l \in \{0, 1, 2\}$ .