Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2022
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Andreas Hackl (Gruppe 1), Daniel Knüttel (Gruppe 2), Valentin Moos (Gruppe 3)

Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik
Blatt 4 (abzugeben am 27. Mai)

Aufgabe 1 Von Neumann Randbedingungen und Gaußscher Satz (4 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Satz von Gauß, dass eine Greensche Funktion G, welche

$$\Delta G(x) = -4\pi\delta^{(3)}(x) \tag{1}$$

erfüllt, nicht gleichzeitig auch

$$\nabla G(x) = 0 \tag{2}$$

erfüllen kann.

Aufgabe 2 Symmetrie der Dirichlet Greenschen Funktion (4 Punkte)

Verwenden Sie den zweiten Greenschen Satz aus der Vorlesung

$$\int_{\varphi} dx \cdot (g(x)\nabla h(x) - h(x)\nabla g(x)) = \int_{\Omega} dx (g(x)\Delta h(x) - h(x)\Delta g(x)) \tag{3}$$

mit

$$g(y) = G_x(y)\,, \qquad h(y) = G_z(y) \tag{4}$$

für eine Greensche Funktion $G_x(y)$ auf Ω mit

$$(\forall y \in \partial\Omega)(G_x(y) = 0) \tag{5}$$

um zu zeigen, dass

$$G_x(y) = G_y(x)\,. \tag{6}$$

Aufgabe 3 Dirichlet Greensche Funktion für Kugelvolumen V (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein Kugelvolumen

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| |x| < R \right\} \tag{7}$$

mit $R \in \mathbb{R}^+$, die Dirichlet Greensche Funktion für $V = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ gegeben ist durch

$$G_x(y) = \frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y|}\frac{1}{|x - \frac{R^2}{|y|^2}y|}\,. \tag{8}$$

Zeigen Sie also, dass

$$(\forall x, y \in V)(\Delta G_x(y) = -4\pi\delta^{(3)}(y-x)) \tag{9}$$

und

$$(\forall y \in \partial V)(G_x(y) = 0)\,. \tag{10}$$

Aufgabe 4 Punktladung über geerdeter Metallkugel (8 Punkte)

Wir definieren eine geerdete Metallkugel durch das Volumen Ω der Aufgabe 3 und die Randbedingung für das Potential Φ

$$(\forall x \in \partial V)(\Phi(x) = 0) \tag{11}$$

mit V aus Aufgabe 3. Gegeben sei jetzt noch eine Punktladung q am Ort $r_q \in V$.

a) Bestimmen Sie mit der Greenschen Funktion der Aufgabe 3, das elektrische Feld in V.

b) Was ist das elektrische Feld in Ω?

c) Bestimmen Sie die Ladungsdichte auf ∂V.

d) Bestimmen Sie die Gesamtladung der Kugel.