Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2022
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Andreas Hackl (Gruppe 1), Daniel Knüttel (Gruppe 2), Valentin Moos (Gruppe 3)

Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik
Blatt 2 (abzugeben am 13. Mai)

Aufgabe 1 Satz von Gauss (5 Punkte)

Für ein $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und $\Omega \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| |x| < 1 \right\}$ (Kugel mit Radius 1 um den Ursprung), berechnen Sie zuerst

$$\int_\Omega dx \, \mathrm{div}\, f(x) \tag{2}$$

and dann separat

$$\int_{\partial\Omega} dx \cdot f(x) \tag{3}$$

mit einer expliziten Parametrisierung der Kugeloberfläche. Verifizieren Sie den Satz von Gauss.

Aufgabe 2 Satz von Stokes (5 Punkte)

Sei

$$\varphi(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises mit $r \in [0, 1]$ und $\phi \in [0, 2\pi[$ und

$$\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

eine Parametrisierung des Randes. Berechnen Sie

$$\int_\varphi dx \cdot \mathrm{rot}\, f(x) \tag{6}$$

und

$$\int_\gamma dx \cdot f(x) \tag{7}$$

für

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Aufgabe 3 Grassmann-Identität (5 Punkte)

Zeigen Sie mit den Tensoridentitäten des ersten Übungsblattes, dass

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \tag{9}$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 Greensche Funktion des Laplace Operators (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein $x \in \mathbb{R}^3$ und dem Laplace Operator Δ gilt

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \delta^{(3)}(x) \tag{10}$$

mit Dirac Delta Distribution δ. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass für ein x mit $|x| \neq 0$ gilt, dass $\Delta \frac{1}{|x|} = 0$.

b) Verwenden Sie den Satz von Gauss um zu zeigen, dass

$$\int_{\Omega_\varepsilon} dx \Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \tag{11}$$

mit $\Omega_\varepsilon \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| |x| < \varepsilon \right\}$.