Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Fabian Haneder (Gruppe 1), Adrian Seith (Gruppe 2), Sebastian Spiegel (Gruppe 3), Raphael Lehner (Gruppe 4)

Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik
Blatt 6 (abzugeben am 28. Mai)

Aufgabe 1 Monopol, Dipol, Quadrupol (5 Punkte)

Berechnen Sie die Gesamtladung, das Kartesische Dipolmoment und Quadrupolmoment der Ladungsverteilung

$$\begin{aligned}\rho(x) &= q_{++}\delta^{(3)}(x-\hat{e}_x-\hat{e}_y)+q_{--}\delta^{(3)}(x+\hat{e}_x+\hat{e}_y)\\ &\quad + q_{+-}\delta^{(3)}(x-\hat{e}_x+\hat{e}_y)+q_{-+}\delta^{(3)}(x+\hat{e}_x-\hat{e}_y)\end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\hat{e}_x \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \hat{e}_y \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass mit $q_{++} = q_{--} = -q_{+-} = -q_{-+} = 1$ die Gesamtladung und das Dipolmoment verschwindet. Was ist das verbleibende Quadrupolmoment?

Aufgabe 2 Punktladung und Grenzfläche zwischen Dielektrika (10 Punkte)

Gegeben Sei eine Punktladung q am Ort

$$\vec{r}_q = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ in Medium 1 mit Dielektrizitätskonstante ε_1 und eine ebene Grenzfläche bei $z = 0$ zu Medium 2 mit Dielektrizitätskonstante ε_2.
Wir machen nun einen Ansatz mit Bildladungen für das Potential in beiden Medien mit

$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases}\Phi^{(1)}(x,y,z) & \text{falls } z>0\\ \Phi^{(2)}(x,y,z) & \text{falls } z<0\end{cases} \tag{4}$$

mit

$$\Phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_1}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}+\frac{q_1}{\varepsilon_1}\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}_q|}\,, \tag{5}$$

$$\Phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{q_2}{\varepsilon_2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}\,. \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass aus den Randbedingungen an den Grenzflächen ohne Oberflächenladung folgt

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\,, \tag{7}$$

$$q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\,. \tag{8}$$

b) Berechnen Sie die induzierte Polarisationsflächenladungsdichte

$$\sigma^P(x,y) = \hat{n}_\perp \cdot \left(\vec{P}^{(2)}(x,y,0) - \vec{P}^{(1)}(x,y,0)\right). \tag{9}$$

c) Berechnen Sie die gesamte induzierte Polarisationsladung

$$q_{\text{induziert}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \sigma^P(x,y). \tag{10}$$

d) Berechnen Sie die Polarisationsladungsdichte

$$\rho^P(\vec{r}) = -\nabla \cdot P^{(1)}(\vec{r}) \tag{11}$$

für $z > 0$.

e) Berechnen Sie die im ganzen $\mathbb{R}^3$ induzierte Polarisationsladung.