Universität Regensburg, Institut für Theoretische Physik Sommer 2021
Prof. Dr. Christoph Lehner (Dozent), Fabian Haneder (Gruppe 1), Adrian Seith (Gruppe 2), Sebastian Spiegel (Gruppe 3), Raphael Lehner (Gruppe 4)

Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik
Blatt 5 (abzugeben am 21. Mai)

Aufgabe 1 Punktladung über isolierter Metallkugel (4 Punkte)

Wir definieren wieder eine Metallkugel auf dem Volumen

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| |x| < R \right\} \tag{1}$$

mit $R \in \mathbb{R}^+$ und diskutieren ein Randwertproblem mit $V = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Die Metallkugel sei isoliert und habe eine Gesamtladung Q. Gegeben sei auch noch eine Punktladung q am Ort $r_q \in V$.
Im Unterschied zur geerdeten Kugel des Übungsblattes 4, gilt in diesem Fall die Randbedingung für das Potential Φ

$$(\forall x \in \partial V)(\Phi(x) = \Phi_0) \tag{2}$$

mit

$$\Phi_0 \equiv \frac{Q - Q_0}{R} \tag{3}$$

und

$$Q_0 \equiv -R\frac{q}{|r_q|} \tag{4}$$

gleich der induzierten Gesamtladung der geerdeten Kugel (siehe Aufgabe 4, Blatt 4). Für $Q = Q_0$ ergibt sich also wieder der Fall der geerdeten Kugel.
Bestimmen Sie für den allgemeinen Fall $Q \neq Q_0$ die Ladungsdichte auf ∂V.

Aufgabe 2 Kugelkondensator (5 Punkte)

Wir betrachten nun einen Kugelkondensator mit zwei konzentrischen Kugelschalen Ω_{r_1} und Ω_{r_2} mit

$$\Omega_r \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| |x| = r \right\} \tag{5}$$

und $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, $r_1 < r_2$ und Ladungsdichte ρ mit

$$\int_{\Omega_{r_1}} dx\rho(x) = Q = -\int_{\Omega_{r_2}} dx\rho(x) \tag{6}$$

mit $Q \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie zuerst das elektrische Feld mit dem Satz von Gauss unter Verwendung der Kugelsymmetrie. Bestimmen Sie dann das Potential und die Kapazität des Kondensators.

Aufgabe 3 Energie des Kondensators (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass unabhängig von der Geometrie eines Kondensators für den Fall $N = 2$ (Notation aus der Vorlesung) gilt

$$W = \frac{Q^2}{2C}\,. \tag{7}$$

Aufgabe 4 Legendre Polynome (8 Punkte)

Wir suchen nach Lösungen $P(x)$ der Differentialgleichung

$$((1-x^2)P'(x))' + l(l+1)P(x) = 0 \tag{8}$$

mit $l \in \mathbb{N}$.

a) Verwenden Sie den Potenzreihenansatz

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{9}$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ um die Differentialgleichung zu lösen und zeigen Sie, dass die Rekursionsbeziehung

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \tag{10}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass aus der Rekursionsbeziehung folgt, dass $a_{l+2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$. Für gerade l muss also $a_1 = 0$ sein, damit die Potenzreihe abbricht, für ungerade l muss $a_0 = 0$ sein, damit die Potenzreihe abbricht. Die Wahl von a_0 bzw. a_1 legt dann nur die Normierung des Polynoms fest.

c) Zeigen Sie nun auch, dass

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l \,. \tag{11}$$

die Differentialgleichung erfüllt.

d) Verifizieren Sie explizit

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tx}} \bigg|_{t=0} \tag{12}$$

für $l \in \{0, 1, 2\}$.