

**Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik**  
**Blatt 4 (abzugeben am 14. Mai)**

---

**Aufgabe 1 Von Neumann Randbedingungen und Gaußscher Satz (4 Punkte)**

Zeigen Sie mit dem Satz von Gauß, dass eine Greensche Funktion  $G$ , welche

$$\Delta G(x) = -4\pi\delta^{(3)}(x) \quad (1)$$

erfüllt, nicht gleichzeitig auch

$$\nabla G(x) = 0 \quad (2)$$

erfüllen kann.

**Aufgabe 2 Symmetrie der Dirichlet Greenschen Funktion (4 Punkte)**

Verwenden Sie den zweiten Greenschen Satz aus der Vorlesung

$$\int_{\varphi} dx \cdot (g(x)\nabla h(x) - h(x)\nabla g(x)) = \int_{\Omega} dx (g(x)\Delta h(x) - h(x)\Delta g(x)) \quad (3)$$

mit

$$g(y) = G_x(y), \quad h(y) = G_z(y) \quad (4)$$

für eine Greensche Funktion  $G_x(y)$  auf  $\Omega$  mit

$$(\forall y \in \partial\Omega)(G_x(y) = 0) \quad (5)$$

um zu zeigen, dass

$$G_x(y) = G_y(x). \quad (6)$$

**Aufgabe 3 Dirichlet Greensche Funktion für Kugelvolumen  $V$  (4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für ein Kugelvolumen

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R \right\} \quad (7)$$

mit  $R \in \mathbb{R}^+$ , die Dirichlet Greensche Funktion für  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  gegeben ist durch

$$G_x(y) = \frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y|} \frac{1}{\left| x - \frac{R^2}{|y|^2} y \right|}. \quad (8)$$

Zeigen Sie also, dass

$$(\forall x, y \in V)(\Delta G_x(y) = -4\pi\delta^{(3)}(y-x)) \quad (9)$$

und

$$(\forall y \in \partial V)(G_x(y) = 0). \quad (10)$$

#### Aufgabe 4 Punktladung über geerdeter Metallkugel (8 Punkte)

Wir definieren eine geerdete Metallkugel durch das Volumen  $\Omega$  der Aufgabe 3 und die Randbedingung für das Potential  $\Phi$

$$(\forall x \in \partial V)(\Phi(x) = 0) \quad (11)$$

mit  $V$  aus Aufgabe 3. Gegeben sei jetzt noch eine Punktladung  $q$  am Ort  $r_q \in V$ .

- a) Bestimmen Sie mit der Greenschen Funktion der Aufgabe 3, das elektrische Feld in  $V$ .
- b) Was ist das elektrische Feld in  $\Omega$ ?
- c) Bestimmen Sie die Ladungsdichte auf  $\partial V$ .
- d) Bestimmen Sie die Gesamtladung der Kugel.