

Übungen zu Theoretische Physik Ib - Elektrodynamik und Optik
Blatt 2 (abzugeben am 30. April)

Aufgabe 1 Satz von Gauss (5 Punkte)

Für ein $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und $\Omega \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1 \right\}$ (Kugel mit Radius 1 um den Ursprung), berechnen Sie zuerst

$$\int_{\Omega} dx \operatorname{div} f(x) \quad (2)$$

and dann separat

$$\int_{\partial\Omega} dx \cdot f(x) \quad (3)$$

mit einer expliziten Parametrisierung der Kugeloberfläche. Verifizieren Sie den Satz von Gauss.

Aufgabe 2 Satz von Stokes (5 Punkte)

Sei

$$\varphi(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises mit $r \in [0, 1]$ und $\phi \in [0, 2\pi[$ und

$$\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

eine Parametrisierung des Randes. Berechnen Sie

$$\int_{\varphi} dx \cdot \operatorname{rot} f(x) \quad (6)$$

und

$$\int_{\gamma} dx \cdot f(x) \quad (7)$$

für

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Aufgabe 3 Grassmann-Identität (5 Punkte)

Zeigen Sie mit den Tensoridentitäten des ersten Übungsblattes, dass

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (9)$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 Greensche Funktion des Laplace Operators (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein $x \in \mathbb{R}^3$ und dem Laplace Operator Δ gilt

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \delta^{(3)}(x) \quad (10)$$

mit Dirac Delta Distribution δ . Gehen Sie wie folgt vor:

- a) Zeigen Sie, dass für ein x mit $|x| \neq 0$ gilt, dass $\Delta \frac{1}{|x|} = 0$.
- b) Verwenden Sie den Satz von Gauss um zu zeigen, dass

$$\int_{\Omega_\varepsilon} dx \Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \quad (11)$$

mit $\Omega_\varepsilon \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < \varepsilon \right\}$.