

Theoretische Physik Ib (Elektrodynamik und Optik)

Prof. Dr. Christoph Lehner

Vorlesung Sommersemester 2021

<https://homepages.uni-regensburg.de/~lec17310/teaching/sose21/em.html>

Version: 10. Juli 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes und Überblick	3
2	Mathematische Hilfsmittel	6
3	Elektrostatik	19
3.1	Coulomb Gesetz und Einheiten	19
3.2	Feldtheorie	20
3.3	Elektrostatische Energie	25
3.4	Elektrischer Leiter	27
3.5	Randwertprobleme	29
3.6	Kondensator	34
3.7	Separationsansatz	37
3.8	Multipolentwicklung	44
3.9	Dielektrika	49
4	Magnetostatik	54
4.1	Ampère Gesetz und Einheiten	54
4.2	Feldtheorie	55
4.3	Magnetischer Dipol	60
4.4	Magnetostatik in Materie	63
4.5	Zusammenfassung der Elektro- und Magnetostatik	65
5	Elektrodynamik	66
5.1	Faradaysches Induktionsgesetz	66
5.2	Maxwellscher Verschiebungsstrom und Maxwell Gleichungen	68
5.3	Elektromagnetische Energie und Impuls	69
5.4	Lösung im quellfreien Raum	72

5.5	Allgemeine Lösung	76
5.6	Dipolstrahlung	79
5.7	Elektrodynamik in Materie	84
6	Spezielle Relativitätstheorie	94
6.1	Galilei und Lorentztransformationen	94
6.2	Kovariante Formulierung und Lorentzgruppe	96
6.3	Kovarianz der Maxwell Gleichungen	100
6.4	Transformation von elektrischen und magnetischen Feldern . . .	103
6.5	Elektromagnetische Wellen, Doppler Effekt, Aberration	105
6.6	Lagrange Formalismus und Noether Theorem	107
A	Bewegungsgleichung Felder	114
B	Noether Theorem für Feldtheorien	114
C	Transformation Levi-Civita Tensor	115

1 Grundlegendes und Überblick

- Newtonsche Bewegungsgleichung und dimensionsbehaftete Größen:

$$F = ma \quad (1)$$

Die Kraft F , die Masse m und die Beschleunigung a sind hier dimensionsbehaftete Größen. Wenn wir also, z.B., einsetzen

$$m = 2\text{kg}, \quad (2)$$

$$a = 3\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3)$$

(mit Meter m und Sekunde s) finden wir

$$F = 2\text{kg} \cdot 3\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6\frac{\text{m kg}}{\text{s}^2}. \quad (4)$$

Wir definieren dann die Einheit *Newton* durch

$$1\text{N} \equiv \frac{\text{m kg}}{\text{s}^2} \quad (5)$$

und schreiben in diesem Fall

$$F = 6\text{N}. \quad (6)$$

Die Variablen m und a sind hier also nicht einfach Elemente von \mathbb{R} und F ist nicht einfach eine Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Es bietet sich daher auch oft an dimensionslose Größen zu definieren

$$\hat{m} \equiv \frac{m}{\text{kg}} \in \mathbb{R}, \quad \hat{a} \equiv \frac{a}{\text{m}^2/\text{s}} \in \mathbb{R}, \quad \hat{F} \equiv \frac{F}{\text{N}} \quad (7)$$

mit

$$\hat{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (\hat{m}, \hat{a}) \mapsto \hat{m}\hat{a}. \quad (8)$$

Eine sorgfältige Diskussion der Einheiten von auftretenden Variablen wird in dieser Vorlesung besonders wichtig um Verwirrung durch die verschiedenen üblichen Einheitensysteme zu vermeiden.

- Erinnerung an Gravitation: Gegeben seien zwei Punktmassen m_1 und m_2 an zwei Orten r_1 und r_2 . Auf Punktmasse 1 wirkt dann eine Kraft

$$\vec{F}_{12} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (9)$$

mit Gravitationskonstante

$$G \equiv 6.67430(15) \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (10)$$

und auf Punktmasse 2 wirkt $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (Kraft gleich Gegenkraft).

Man kann sich ebenso vorstellen, dass Punktmasse 2 ein Gravitationsfeld

$$\vec{g}_2(\vec{x}) \equiv Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{x}}{|\vec{r}_2 - \vec{x}|^3} \quad (11)$$

erzeugt und auf Punktmasse 1 eine entsprechende Kraft

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{g}_2(\vec{r}_1) \quad (12)$$

wirkt. Ein solches Feld nennt man auch Vektorfeld, da es einem jedem Raumpunkt einen entsprechenden Feldvektor zuordnet.

- Neue fundamentale Kraft (Coulomb): Gegeben seien zwei Punktladungen q_1 und q_2 an zwei Orten r_1 und r_2 . Auf Punktladung 1 wirkt dann eine Kraft

$$\vec{F}_{12} = -k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (13)$$

mit Coulombkonstante

$$k_e \equiv 8.9875517923(14) \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \quad (14)$$

und der Einheit Coulomb definiert durch

$$1\text{C} \equiv 6.241509126(38) \times 10^{18} \text{e}, \quad (15)$$

wobei e die Elementarladung eines Protons ist ($-e$ ist die Ladung eines Elektrons).

Analog zum Gravitationsfeld, definieren wir nun das von Punktladung 2 erzeugte elektrische Feld

$$\vec{E}_2(\vec{x}) \equiv -k_e q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{x}}{|\vec{r}_2 - \vec{x}|^3} \quad (16)$$

so dass auf Punktladung 1 eine entsprechende Kraft

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1) \quad (17)$$

wirkt.

Wichtiger Unterschied: Coulomb kann anziehend und abstoßend sein, Gravitation nur anziehend (nur positive Massen)

In Übungen: Vergleich Coulomb/Gravitation bei Elementarteilchen

- Weitere neue Kraft (Lorentzkraft im engeren Sinn): Eine bewegte Ladung erzeugt ein magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{x})$ (Biot-Savart) welches auf eine Punktladung q_1 am Ort \vec{r}_1 mit Geschwindigkeit \vec{v}_1 mit einer Kraft

$$\vec{F}_1 = q_1 \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}_1) \quad (18)$$

wirkt.

Die Summe aus Coulomb und Lorentzkraft im engeren Sinn wird auch oft nur Lorentzkraft genannt.

- Maxwell-Gleichungen: Wir betrachten nun auch zeitabhängige elektrische und magnetische Felder und finden dann die Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (19)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (20)$$

mit Ladungsdichte ρ , Stromdichte \vec{j} und Konstanten

$$\varepsilon_0 \equiv 8.8541878128(13) \times 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}}, \quad (21)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \equiv \frac{1}{c^2} \quad (22)$$

mit Lichtgeschwindigkeit c und Einheiten *Ampere* und *Volt* definiert als

$$1\text{A} \equiv 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}, \quad 1\text{V} \equiv 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}}. \quad (23)$$

Elektrische und magnetische Felder sind also nicht unabhängig von einander \Rightarrow Eine gemeinsame Beschreibung als Elektromagnetismus bietet sich an

Das auftreten der Lichtgeschwindigkeit hier ist kein Zufall: Werden Zeigen, dass sich elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten (Licht als elektromagnetische Welle)

- Spezielle Relativitätstheorie: Was ein elektrisches Feld ist und was ein magnetisches Feld ist hängt vom Bezugssystem ab! Betrachte hierbei verschiedene Inertialsysteme, also Bezugssysteme in denen jeder kräftefreie Körper sich gleichförmig und geradlinig bewegt.

Wir zeigen dann, dass sich elektrische und magnetische Felder sich elegant relativistisch formulieren lassen und die Maxwell-Gleichungen in jedem Inertialsystem gelten. (Daher folgt dann auch, dass sich Lichtwellen mit gleicher Geschwindigkeit in jedem Inertialsystem ausbreiten.)

- Aufbau der Vorlesung:

1. Grundlegendes und Überblick
2. Mathematische Hilfsmittel
3. Elektrostatik
4. Magnetostatik
5. Elektrodynamik
6. Maxwell-Gleichungen und Spezielle Relativitätstheorie
7. Elektrodynamik in Materie und Optik

2 Mathematische Hilfsmittel

- Siehe auch Mathematische Methoden Vorlesung: <https://homepages.uni-regensburg.de/~lec17310/teaching/wise2021/mm.html>; inkl. Skript, Tafelanschrieb und Videos
- Im folgenden schränken wir uns auf den Vektorraum \mathbb{R}^n ein.
- Das Skalarprodukt zweier reeller Vektoren \vec{x} und \vec{y} ist definiert als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv \sum_{k=1}^n x_k y_k. \quad (24)$$

- Der Betrag oder die Länge eines Vektors ist definiert als

$$|\vec{y}| \equiv \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}}. \quad (25)$$

- Mit Hilfe des Betrages können wir Einheitsvektoren (Vektoren der Länge 1) definieren

$$\hat{y} \equiv \frac{1}{|\vec{y}|} \vec{y}. \quad (26)$$

- Der Winkel $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} ist definiert durch

$$\cos(\angle(\vec{x}, \vec{y})) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \hat{x} \cdot \hat{y}. \quad (27)$$

Wir nennen \vec{x} und \vec{y} orthogonal, wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Beispiel: Für $n = 2$ können zwei Vektoren geschrieben werden als

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Daher ist

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} e^{-i\phi} + e^{-i\theta} e^{i\phi}) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}) = \cos(\theta - \phi). \quad (30)$$

- In 3d ist für zwei Vektoren

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt)

$$\vec{x} \times \vec{y} \equiv \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

immer orthogonal zu \vec{x} und \vec{y} .

- Definiere den total antisymmetrischen Tensor $\varepsilon_{i_1, \dots, i_n}$ (oft auch Levi-Civita Tensor) mit $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$ und

$$\varepsilon_{1,2,3,\dots,n} = 1, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_s, \dots, i_t, \dots, i_n} = -\varepsilon_{i_1, \dots, i_t, \dots, i_s, \dots, i_n}. \quad (34)$$

Diese beiden Eigenschaften definieren jedes der n^n möglichen Elemente eindeutig. Insbesondere folgt aus der zweiten Eigenschaft, dass

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_s, \dots, i_s, \dots, i_n} = 0. \quad (35)$$

Beispiel Tensor Stufe 3 ($n = 3$): Alle $\varepsilon_{ijk} = 0$ bis auf

$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1, \quad \varepsilon_{132} = -1. \quad (36)$$

Die i -te Komponente des Kreuzproduktes lässt sich somit auch schreiben als

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{x}_j \vec{y}_k \quad (37)$$

$$= \varepsilon_{ijk} x_j y_k, \quad (38)$$

wobei wir in der letzten Zeile die Summen-Zeichen über wiederholte Indizes weggelassen haben. Das Implizieren von Summen über wiederholte Indizes nennt man auch die **Einsteinsche Summenkonvention**.

- Wichtige Tensoridentitäten:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}, \quad (39)$$

$$\varepsilon_{jmn} \varepsilon_{imn} = 2\delta_{ji}, \quad (40)$$

$$\varepsilon_{imn} \varepsilon_{imn} = 6 \quad (41)$$

mit Kronecker Delta

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (42)$$

Übungsaufgabe Blatt 1.

- Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir nun für absolut integrierbare Funktionen ein mehrdimensionales Integral durch iterierte Integrale

$$\int_{\Omega} d\vec{z} f(\vec{z}) \equiv \int dz_1 \int dz_2 \cdots \int dz_n f(z_1, \dots, z_n) \quad (43)$$

mit $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, wobei die Integrationsgrenzen der einzelnen z_i -Integrale durch Ω induziert sind.

Beispiel: Für

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1 \right\} \quad (44)$$

gilt

$$\int_{\Omega} d\vec{z} f(\vec{z}) = \int_{-1}^1 dz_1 \int_{-\sqrt{1-z_1^2}}^{\sqrt{1-z_1^2}} dz_2 f(z_1, z_2). \quad (45)$$

- Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung, dann definieren wir die Jacobi-Matrix

$$Dg(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} \quad (46)$$

und nennen

$$\det(Dg(x)) \quad (47)$$

die Funktionaldeterminante.

Beispiel: $n = 2$

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

- Transformationssatz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ mit $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^n$ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung und $\det(Dg(x)) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{\Omega}$, dann gilt

$$\int_{\Omega} dy f(y) = \int_{\tilde{\Omega}} dx f(g(x)) |\det(Dg(x))| \quad (49)$$

mit $y \in \mathbb{R}^n$.

- Beispiel: Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ kann in Polarkoordinaten dargestellt werden

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} \equiv g(r, \theta) \quad (50)$$

Die entsprechende Jacobi-Matrix ist dann

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (51)$$

und die Funktionaldeterminante

$$\det(Dg) = r(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) = r. \quad (52)$$

Für die Kreismenge

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\} \quad (53)$$

gilt dann

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta) \mid r \in [0, 1[\wedge \theta \in [0, 2\pi[\} \quad (54)$$

und daher sagt der Transformationssatz dass die Kreisfläche

$$A = \int_{\Omega} dy \, 1 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta r = 2\pi \int_0^1 dr r = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = \pi. \quad (55)$$

- Koordinatensysteme:

- Kartesische Koordinaten: Falls $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, nennt man Koordinaten (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \Omega_i$ kartesisch. Beispiel: $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\Omega_i = \mathbb{R}$.

- Polarkoordinaten:

$$x_1 = r \cos(\phi), \quad (56)$$

$$x_2 = r \sin(\phi) \quad (57)$$

mit $(x_1, x_2) = g(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $r \in [0, \infty[$ und $\phi \in [0, 2\pi[$. Funktionaldeterminante: $\det(Dg) = r$

- Kugelkoordinaten in 3d:

$$x_1 = r \cos(\phi) \sin(\theta), \quad (58)$$

$$x_2 = r \sin(\phi) \sin(\theta), \quad (59)$$

$$x_3 = r \cos(\theta) \quad (60)$$

mit $(x_1, x_2, x_3) = g(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ bzw. $r \in [0, \infty[$, $\theta \in [0, \pi[$ und $\phi \in [0, 2\pi[$. Funktionaldeterminante: $\det(Dg) = r^2 \sin(\theta)$

- Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = r \cos(\phi), \quad (61)$$

$$x_2 = r \sin(\phi), \quad (62)$$

$$x_3 = z \quad (63)$$

mit $(x_1, x_2, x_3) = g(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3$ bzw. $r \in [0, \infty[$, $\phi \in [0, 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$. Funktionaldeterminante: $\det(Dg) = r$

- Eine injektive stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (64)$$

mit d -dimensionalem $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiert ein d -dimensionales Teilgebiet $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren im Allgemeinen ein Integral über ein solches Teilgebiet durch

$$\int_{\varphi} dx f(x) \equiv \int_{\Omega} du f(\varphi(u)) \sqrt{\det(\varphi'(u)^T \varphi'(u))} \quad (65)$$

für ein stetiges $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Matrix

$$\varphi'(u) \equiv \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(u) \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times d}. \quad (66)$$

Für $d = n$ reduziert sich dieses Integral zum Transformationssatz.

- Eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Omega =]t_0, t_1[\subset \mathbb{R}$ nennen wir einen stetig differenzierbarer Weg und

$$\int_{\gamma} dx f(x) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \quad (67)$$

das Wegintegral **erster Art** für ein stetiges $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen einen Weg einfach, falls γ injektiv ist. Diese Formel folgt für $d = 1$ aus Gl. (65).

Übungsaufgabe Blatt 1.

- Für eine injektive stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit zweidimensionalem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nennen wir

$$\int_{\varphi} dx f(x) \equiv \int_{\Omega} d\sigma f(\varphi(\sigma)) |\varphi_1(\sigma) \times \varphi_2(\sigma)| \quad (68)$$

das Flächenintegral **erster Art** für ein stetiges $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\varphi_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (69)$$

Diese Formel folgt für $d = 2$ und $n = 3$ aus Gl. (65).

Übungsaufgabe Blatt 1.

- Parametrisierungsinvarianz: Sei $\tau : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ eine bijektive Abbildung mit $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, dann gilt wegen des Transformationssatzes für ein $\tilde{\varphi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \varphi(\tau(x))$, dass

$$\int_{\tilde{\varphi}} dx f(x) = \int_{\varphi} dx f(x). \quad (70)$$

Diese Eigenschaft der Weg- und Flächenintegrale nennt man Parametrisierungsinvarianz.

Beweis:

$$\int_{\tilde{\varphi}} dx f(x) = \int_{\tilde{\Omega}} du f(\varphi(\tau(u))) \sqrt{\det(\tilde{\varphi}'(u)^T \tilde{\varphi}'(u))} \quad (71)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} du f(\varphi(\tau(u))) \sqrt{\det(\tau'(u)^T \varphi'(\tau(u))^T \varphi'(\tau(u)) \tau'(u))} \quad (72)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} du f(\varphi(\tau(u))) \sqrt{\det(\varphi'(\tau(u))^T \varphi'(\tau(u))) \det(\tau'(u)^T \tau'(u))} \quad (73)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} du f(\varphi(\tau(u))) \sqrt{\det(\varphi'(\tau(u))^T \varphi'(\tau(u)))} |\det(\tau'(u))| \quad (74)$$

$$= \int_{\Omega} dv f(\varphi(v)) \sqrt{\det(\varphi'(v)^T \varphi'(v))} \quad (75)$$

$$= \int_{\varphi} dx f(x) \quad (76)$$

mit

$$(\tilde{\varphi}'(u))_{ij} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial x_j}(u) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}(\tau(u)) \frac{\partial \tau_l}{\partial x_j}(u) = (\varphi'(\tau(u)) \tau'(u))_{ij}. \quad (77)$$

- Vektoranalysis: Analysis mit Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. In der Physik nennt man solche Abbildungen auch oft Vektorfelder und Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfelder.
- Es ist nützlich den Nabla Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (78)$$

zu definieren mit

$$\nabla_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (79)$$

- Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dann definieren wir den Gradienten $\text{grad}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\text{grad}(f) \equiv \nabla f \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (80)$$

- Des weiteren definieren wir für ein $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Divergenz $\text{div}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{div}(f) \equiv \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}. \quad (81)$$

- Zuletzt definieren wir für ein $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Rotation

$$\text{rot}(f) \equiv \nabla \times f \quad (82)$$

oder in Tensornotation

$$\text{rot}(f)_i = (\nabla \times f)_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j f_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_k. \quad (83)$$

- Ein weiterer wichtiger Operator ist

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (84)$$

- Beispiele: Sei

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (85)$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 + x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (86)$$

dann ist

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, \quad (87)$$

$$\text{div } g = \frac{\partial}{\partial x_i} g_i = 2(x_1 + x_2 + x_3), \quad (88)$$

$$\text{rot } g = (\varepsilon_{ijk} \nabla_j g_k) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

$$\Delta f = 6. \quad (90)$$

- Man kann zeigen, dass für stetig differenzierbare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\text{rot grad } f = 0 \quad (91)$$

und

$$\text{div rot } g = 0. \quad (92)$$

Es gilt ausserdem der Umkehrschluss, dass aus

$$\text{rot } g = 0 \quad (93)$$

folgt, dass es ein $l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$g = \text{grad } l \quad (94)$$

und aus

$$\operatorname{div} g = 0 \quad (95)$$

folgt, dass es ein $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$g = \operatorname{rot} h. \quad (96)$$

- Für einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Omega =]t_0, t_1[\subset \mathbb{R}$ und ein Feld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert

$$\int_{\gamma} dx \cdot f(x) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad (97)$$

das Wegintegral **zweiter Art**.

- Für eine injektive stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit zweidimensionalem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und ein Feld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennen wir

$$\int_{\varphi} dx \cdot f(x) \equiv \int_{\Omega} d\sigma f(\varphi(\sigma)) \cdot (\varphi_1(\sigma) \times \varphi_2(\sigma)) \quad (98)$$

das Flächenintegral **zweiter Art**.

- Die Integrale zweiter Art sind bis auf ein Vorzeichen auch parametrisierungsinvariant. Das Vorzeichen hängt von der Umlaufrichtung in γ bzw. der Richtung des sogenannten Normalvektors $\varphi_1(\sigma) \times \varphi_2(\sigma)$ ab.
- Wir definieren nun weitere Hilfsgrößen. Zuerst ist

$$U_{\varepsilon}(x) = \left\{ y \mid |x - y| < \varepsilon \right\} \quad (99)$$

eine ε -Umgebung des Punktes $x \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren das Innere Ω° einer Menge Ω durch

$$\Omega^{\circ} \equiv \left\{ y \mid \text{Es existiert ein } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } U_{\varepsilon}(y) \subset \Omega \right\}. \quad (100)$$

Wir definieren den Abschluss $\bar{\Omega}$ einer Menge Ω durch

$$\bar{\Omega} \equiv \left\{ y \mid \text{Für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ gilt } U_{\varepsilon}(y) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}. \quad (101)$$

Dadurch definieren wir den Rand $\partial\Omega$ einer Menge Ω durch

$$\partial\Omega \equiv \bar{\Omega} \setminus \Omega^{\circ}. \quad (102)$$

Beispiel: $\Omega =]0, 1[$, $\Omega^{\circ} =]0, 1[$, $\bar{\Omega} = [0, 1]$, $\partial\Omega = \{0, 1\}$.

- Satz von Gauss: Für ein $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einer Parametrisierung $\varphi : \varphi^{-1}(\partial\Omega) \rightarrow \partial\Omega$ gilt

$$\int_{\Omega} dx \operatorname{div} f(x) = \int_{\varphi} dx \cdot f(x) \quad (103)$$

mit Normalvektor von φ der aus Ω heraus zeigt. Falls für die Parametrisierung der Normalvektor in Ω hinein zeigt, gilt die Gleichung

$$\int_{\Omega} dx \operatorname{div} f(x) = - \int_{\varphi} dx \cdot f(x). \quad (104)$$

- Satz von Stokes: Für ein $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ein stetig differenzierbares $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit zweidimensionalem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_{\varphi} dx \cdot \operatorname{rot} f(x) = \int_{\gamma} dx \cdot f(x). \quad (105)$$

mit einer Parametrisierung $\gamma : \gamma^{-1}(\partial\varphi(\Omega)) \rightarrow \partial\varphi(\Omega)$ des Randes von $\varphi(\Omega)$, wobei γ den Normalvektor von φ gegen den Uhrzeigersinn umläuft. (Man denke sich den Normalvektor als einen Vektor der aus der Uhr zum Beobachter zeigt und γ läuft entweder im Uhrzeiger oder gegen den Uhrzeigersinn.) Falls γ den Normalvektor von φ im Uhrzeigersinn umläuft gilt

$$\int_{\varphi} dx \cdot \operatorname{rot} f(x) = - \int_{\gamma} dx \cdot f(x). \quad (106)$$

- Konservative Kraft: Wir nennen eine Kraft konservativ, falls der Kraftvektor $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ geschrieben werden kann als

$$\vec{F} = - \operatorname{grad} \Phi \quad (107)$$

für ein $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel: Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ die auf ein Teilchen am Ort $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ im Schwerkraft-Feld der Erde wirkt:

$$\Phi(\vec{x}) = mgx_3 \quad (108)$$

mit Masse m und Erdbeschleunigung g .

Die Kraft ist dann

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}. \quad (109)$$

- Wir definieren die Arbeit entlang eines Weges $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch das Wegintegral zweiter Art:

$$W_{\gamma} \equiv \int_{\gamma} dx \cdot \vec{F}(x). \quad (110)$$

- Für eine konservative Kraft gilt, dass entlang geschlossenen Wegen keine Arbeit verrichtet wird.

Beweis: Für einen geschlossenen Weg γ kann immer die eingeschlossene Fläche $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert werden mit $\partial\varphi(\tilde{\Omega}) = \gamma(\Omega)$. Es kann immer eine Parametrisierung φ gefunden werden, dass Stokes gilt

$$W_\gamma = \int_\gamma dx \cdot \vec{F}(x) = \int_\varphi dx \cdot \text{rot } \vec{F}(x) \quad (111)$$

$$= - \int_\varphi dx \cdot \text{rot grad } \Phi(x) = 0, \quad (112)$$

da $\text{rot grad} = 0$, wie bereits bewiesen.

- Daraus folgt auch, dass für konservative Kräfte die Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.
- Greensche Sätze: Setze im Gausschen Satz $f = g\nabla h$ mit $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dann folgt

$$\int_\varphi dx \cdot (g(x)\nabla h(x)) = \int_\Omega dx \nabla \cdot (g(x)\nabla h(x)) \quad (113)$$

$$= \int_\Omega dx \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) \right) \quad (114)$$

$$= \int_\Omega dx \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} h(x) \right) + \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) \right) \right) \\ = \int_\Omega dx ((\nabla g(x)) \cdot (\nabla h(x)) + g(x)\Delta h(x)) \quad (115)$$

mit Produktregel und Einsteinscher Summenkonvention. Es folgt also der **erste Greensche Satz**

$$\int_\varphi dx \cdot (g(x)\nabla h(x)) = \int_\Omega dx \left((\nabla g(x)) \cdot (\nabla h(x)) + g(x)\Delta h(x) \right) \quad (116)$$

und durch Subtrahieren des $g \leftrightarrow h$ Vertauschten auch der **zweite Greensche Satz**

$$\int_\varphi dx \cdot (g(x)\nabla h(x) - h(x)\nabla g(x)) = \int_\Omega dx (g(x)\Delta h(x) - h(x)\Delta g(x)). \quad (117)$$

- Helmholtzischer Hauptsatz der Vektoranalysis: Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f \rightarrow 0$ für $|r| \rightarrow \infty$ schneller als $1/|r|$, dann gilt

$$f = -\text{grad } \Phi + \text{rot } A \quad (118)$$

mit

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\operatorname{div} f(y)}{|x-y|}, \quad (119)$$

$$A(x) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\operatorname{rot} f(y)}{|x-y|}. \quad (120)$$

Da $\operatorname{grad} \Phi = 0$ und $\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$ kann f also als eine Summe aus einem Divergenz-freien und Rotations-freien Teil geschrieben werden.

Eleganter Beweis durch Fourier Transformation, weiter unten geführt.

- Definiere zunächst die Dirac Delta Distribution δ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) \delta(k) = f(0) \quad (121)$$

für eine am Ort $k = 0$ differenzierbare Funktion $f(k)$.

Es bietet sich ausserdem an die Integral-Darstellung

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \quad (122)$$

einzuführen.

Für eine detaillierte Diskussion der mathematischen Grundlagen dieser Gleichungen, siehe <https://homepages.uni-regensburg.de/~lec17310/teaching/wise2021/mm.html>.

- Eine mehrdimensionale Delta Distribution für ein $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} dk f(k) \delta^{(n)}(k) = f(0, \dots, 0) \quad (123)$$

folgt dann aus

$$\delta^{(n)}(k) = \prod_{i=1}^n \delta(k_i). \quad (124)$$

- Definiere die mehrdimensionale Fourier Transformation für ein $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, k \mapsto \hat{f}(k)$ und

$$\hat{f}(k) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-ik \cdot x} f(x) \quad (125)$$

mit

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{ik \cdot x} \hat{f}(k). \quad (126)$$

Beweis mit Delta Distribution.

- Zunächst Beweis für Helmholtz: Wir drücken zuerst das Skalar durch die Fourier-Transformation von f aus

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\operatorname{div} f(y)}{|x-y|} \quad (127)$$

$$= \frac{1}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|x-y|} \hat{f}(k)_j \frac{\partial}{\partial y_j} e^{ik \cdot y}, \quad (128)$$

$$= \frac{i}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{e^{ik \cdot y}}{|x-y|} \hat{f}(k) \cdot k \quad (129)$$

$$= \frac{i}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{e^{ik \cdot (y+x)}}{|y|} \hat{f}(k) \cdot k. \quad (130)$$

Daher ist dann

$$-\operatorname{grad} \Phi(x)_j = \frac{k_j}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{e^{ik \cdot (y+x)} \hat{f}(k) \cdot k}{|y|}. \quad (131)$$

Wir drücken dann das Vektorpotential durch \hat{f} aus

$$A(x)_j = \frac{\varepsilon_{jab}}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|x-y|} \hat{f}(k)_b \frac{\partial}{\partial y_a} e^{ik \cdot y}, \quad (132)$$

$$= \frac{i}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|x-y|} (k \times \hat{f}(k))_j e^{ik \cdot y}, \quad (133)$$

$$= \frac{i}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|y|} (k \times \hat{f}(k))_j e^{ik \cdot (y+x)}. \quad (134)$$

Daher ist dann

$$\operatorname{rot}(A)(x)_j = -\frac{1}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|y|} (k \times (k \times \hat{f}(k)))_j e^{ik \cdot (y+x)}. \quad (135)$$

Aus der Grassmann-Identität (Übungen) folgt dann

$$k \times (k \times \hat{f}(k)) = (k \cdot \hat{f}(k))k - k^2 \hat{f}(k) \quad (136)$$

und daher

$$-\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} A = \frac{1}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{e^{ik \cdot (y+x)} k^2 \hat{f}(k)}{|y|} \quad (137)$$

$$= -\Delta \frac{1}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{e^{ik \cdot (y+x)} \hat{f}(k)}{|y|} \quad (138)$$

$$= -\Delta \frac{1}{4\pi(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{e^{ik \cdot y} \hat{f}(k)}{|y-x|} \quad (139)$$

$$= -\Delta \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{f(y)}{|y-x|} \quad (140)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dy f(y) \delta^{(3)}(x-y) = f(x) \quad (141)$$

mit (Beweis in Übungen)

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta^{(3)}(x). \quad (142)$$

- Es bietet sich nun noch an den Nabla Operator in Kugelkoordinaten zu diskutieren. Wir definieren

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (143)$$

mit

$$x = r \cos(\phi) \sin(\theta), \quad (144)$$

$$y = r \sin(\phi) \sin(\theta), \quad (145)$$

$$z = r \cos(\theta) \quad (146)$$

und daher

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = J\nabla \quad (147)$$

bzw.

$$\nabla = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (148)$$

mit

$$J \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (149)$$

Wir berechnen also zuerst J und invertieren dann die Matrix. Nach einer längeren Rechnung findet man dann z.B. für den Laplace Operator

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (150)$$

3 Elektrostatik

3.1 Coulomb Gesetz und Einheiten

- Gegeben seien zwei Punktladungen q_1 und q_2 an zwei Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . Auf Punktladung 1 wirkt dann eine Kraft

$$\vec{F}_{12} = -k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (151)$$

mit Coulombkonstante k_e definiert in Kapitel 1.

- Eigenschaften:
 - Zentralkraft: hängt nur von $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ab
 - Proportional zu $q_1 q_2$: Abstoßend für gleichnamige Ladungen, Anziehend für entgegengesetzte Ladungen
 - Abstandsgesetz: Kraftbetrag proportional zu $1/r^2$ mit $r \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$
 - Drittes Newtonsche Axiom ($\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$)
- Einheitendiskussion: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \vec{0} \quad (152)$$

und daher

$$F = \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}. \quad (153)$$

- SI System:

$$k_e \equiv 8.9875517923(14) \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \quad (154)$$

mit Coulomb

$$1\text{C} \equiv 6.241509126(38) \times 10^{18} e \quad (155)$$

und Elementarladung e (mit Elektronenladung $-e$ und Protonladung e).

- Gauss System: Absorbieren k_e in Definition der Ladung

$$q_i^{\text{CGS}} = \sqrt{k_e} q_i \quad (156)$$

wodurch

$$F = \frac{q_1^{\text{CGS}} q_2^{\text{CGS}}}{r^2}. \quad (157)$$

Man definiert, dann eine Ladungseinheit LE dadurch, dass wenn

$$q_1^{\text{CGS}} = q_2^{\text{CGS}} = 1 \text{ LE} \quad (158)$$

im Abstand von 1cm genau

$$1 \text{ dyn} \equiv 10^{-5} \text{ N} \quad (159)$$

Kraft wirkt.

Daraus folgt dann die Beziehung

$$(1 \text{ LE})^2 = 10^{-5} \text{ N}(1\text{cm})^2 \quad (160)$$

bzw.

$$(1 \text{ LE})^2 = 10^{-5} \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} (1\text{cm})^2 = \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} (1\text{cm})^2 = \frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}. \quad (161)$$

Daraus folgt noch das Verhältnis einer Gauss Ladungseinheit zu einem Coulomb

$$\frac{\text{LE}}{\sqrt{k_e C}} = \sqrt{\frac{\text{LE}^2}{k_e C^2}} = \sqrt{\frac{10^{-5} \text{ cm}^2}{8.987552 \times 10^9 \text{ m}^2}} \quad (162)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8.987552 \times 10^{18}}} = 3.33564 \times 10^{-10} \quad (163)$$

zu sechs signifikanten Stellen.

3.2 Feldtheorie

- Wir verwenden in diesem Kapitel das Gauss Einheitensystem, absorbieren also k_e in die Definition der Ladungen.
- Betrachte zuerst wieder zwei Ladungen q_1, q_2 an Orten \vec{r}_1, \vec{r}_2 . Wir separieren die Abhängigkeiten von (\vec{r}_1, q_1) und (\vec{r}_2, q_2) indem wir ein von Teilchen 2 erzeugt elektrisches Feld

$$\vec{E}_2(\vec{x}) \equiv q_2 \frac{\vec{x} - \vec{r}_2}{|\vec{x} - \vec{r}_2|^3} \quad (164)$$

definieren mit

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1). \quad (165)$$

- Superpositionsprinzip: Kräfte addieren sich und wegen (165) auch die Felder. Für N Ladungen q_1, \dots, q_N an Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ gilt

$$\vec{E}(\vec{x}) \equiv \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{r}_i}{|\vec{x} - \vec{r}_i|^3} = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \quad (166)$$

mit Ladungsdichte

$$\rho(y) \equiv \sum_{i=1}^N q_i \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{r}_i). \quad (167)$$

Für $N \rightarrow \infty$ bietet es sich oft an eine kontinuierliche Ladungsverteilung ρ zu verwenden.

- Beachte: \vec{E} ist nun ein Feld, welches von der Ladungsdichte ρ erzeugt wurde. Unter der Annahme, dass sich am Ort \vec{x} eine kleine Probeladung q_P befindet, welche ρ selbst nicht verändert, wirkt auf diese Ladung die Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = q_P \vec{E}(\vec{x}). \quad (168)$$

- Für ein von (166) erzeugtes elektrisches Feld gilt also

$$\operatorname{div} \vec{E}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \rho(\vec{y}) \nabla \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = - \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \rho(\vec{y}) \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (169)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \rho(\vec{y}) \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \rho(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (170)$$

$$= 4\pi \rho(\vec{x}) \quad (171)$$

und

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} \rho(\vec{y}) \nabla \times \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \vec{0}. \quad (172)$$

Es folgen also die Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}(x) = 4\pi \rho(\vec{x}), \quad \operatorname{rot} \vec{E}(x) = \vec{0} \quad (173)$$

einer statische Ladungsverteilung ρ .

- Wir verwenden nun den Helmholtzschen Hauptsatz der Vektoranalysis für \vec{E} ,

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{A} \quad (174)$$

und definieren Skalar- und Vektorfelder

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\operatorname{div} \vec{E}(y)}{|x - y|}, \quad \vec{A}(x) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\operatorname{rot} \vec{E}(y)}{|x - y|}. \quad (175)$$

Das Skalarfeld Φ nennen wir auch elektrisches Potential.

Für eine statische Ladungsverteilung ρ gilt also

$$\Phi(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\rho(y)}{|x - y|}, \quad \vec{A}(x) = \vec{0}. \quad (176)$$

Daher gilt

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi \quad (177)$$

weshalb die elektrostatische Kraft konservativ ist (siehe Kapitel zu Mathematischen Hilfsmittel).

- Es folgt die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} dy \rho(y) \Delta \frac{1}{|x-y|} \quad (178)$$

$$= -4\pi\rho(x) \quad (179)$$

und im lokal Ladungsfreien Fall ($\rho(x) = 0$) die sogenannte Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(x) = 0. \quad (180)$$

- Gaußsches Gesetz: Für die Ladung Q_V eines Volumenelements V gilt

$$Q_V \equiv \int_V dx \rho(x) = \frac{1}{4\pi} \int_V dx \text{div } \vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dx \cdot \vec{E}(x) \quad (181)$$

mit Normalvektor der aus dem Volumen V heraus zeigt. Man sagt auch: die in V eingeschlossene Ladung erzeugt einen Fluss des \vec{E} Feldes aus dem Volumen heraus.

- Satz von Stokes: Es gilt für eine zweidimensionale zusammenhängende Fläche A

$$0 = \int_A dx \cdot \text{rot } \vec{E}(x) = \int_{\partial A} dx \cdot \vec{E}(x) \quad (182)$$

für die entsprechenden Flächen und Wegintegrale zweiter Art. Man sagt auch: Es gibt keine geschlossenen Feldlinien in der Elektrostatik.

- Kugelsymmetrische Ladungsverteilung: Sei O eine spezielle orthogonale Matrix, dann ist für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(Ox) = \rho(x) \quad (183)$$

mit $x \in \mathbb{R}^3$. Es gilt dann für das Potential

$$\Phi(Ox) = \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\rho(y)}{|Ox-y|} = \int_{\mathbb{R}^3} dz \frac{\rho(Oz)}{|Ox-Oz|} \quad (184)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dz \frac{\rho(Oz)}{|x-z|} = \int_{\mathbb{R}^3} dz \frac{\rho(z)}{|x-z|} = \Phi(x) \quad (185)$$

mit dem Transformationssatz, $|Ox| = |x|$ und $\det(O) = 1$. Daraus folgt, dass es ein $\hat{\Phi}$ gibt mit

$$\Phi(x) = \hat{\Phi}(|x|) \quad (186)$$

da $|x|$ die einzige Invariante unter O ist.

Für das Feld folgt daher

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\hat{\Phi}(|\vec{x}|) = -\hat{\Phi}'(|\vec{x}|)\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (187)$$

$$= -\hat{\Phi}'(|\vec{x}|)\hat{x}. \quad (188)$$

- Beispiel: Das Feld einer homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q . Ladungsverteilung:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & \text{falls } |\vec{x}| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (189)$$

Auf Blatt 3 besprechen Sie die direkte Integration des elektrischen Feldes und die Bestimmung durch die Poisson Gleichung.

Hier: Bestimme \vec{E} durch Gaußsches Gesetz:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dx \cdot \vec{E}(x) = \int_V dx \rho(x). \quad (190)$$

Wir definieren zuerst

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| < r\} \quad (191)$$

für ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\partial V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| = r\}. \quad (192)$$

Wir parametrisieren dann ∂V in Kugelkoordinaten so, dass der Normalvektor aus V heraus zeigt, durch

$$\varphi(\theta, \phi) \equiv \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (193)$$

mit $\theta \in [0, \pi[$ und $\phi \in [0, 2\pi[$. Der Normalvektor ist gegeben durch

$$\varphi_1(\theta, \phi) \times \varphi_2(\theta, \phi) = r^2 \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta)^2 \\ \sin(\phi) \sin(\theta)^2 \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (194)$$

und daher wegen der Kugelsymmetrie

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dx \cdot \vec{E}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dx \cdot \hat{x} \hat{\Phi}'(|\vec{x}|) \quad (195)$$

$$= -\frac{\hat{\Phi}'(r)r^2}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta)^2 \\ \sin(\phi) \sin(\theta)^2 \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hat{\Phi}'(r)r^2}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\theta) (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 (\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2))$$

$$= -\frac{\hat{\Phi}'(r)r^2}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\theta) \quad (196)$$

$$= -\hat{\Phi}'(r)r^2. \quad (197)$$

Es gilt ausserdem für $r \leq R$

$$\int_V dx \rho(x) = 4\pi \int_0^r d\tilde{r} \tilde{r}^2 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3} \quad (198)$$

und für $r \geq R$

$$\int_V dx \rho(x) = Q. \quad (199)$$

Aus dem Gaußschen Gesetz folgt nun für $r \leq R$

$$-\hat{\Phi}'(r)r^2 = Q \frac{r^3}{R^3} \quad (200)$$

und daher

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\hat{\Phi}'(|\vec{x}|)\hat{x} = Q \frac{|\vec{x}|}{R^3} \hat{x} = Q \frac{\vec{x}}{R^3}. \quad (201)$$

Für $r \geq R$ folgt

$$-\hat{\Phi}'(r)r^2 = Q \quad (202)$$

und daher

$$\vec{E}(\vec{x}) = Q \frac{1}{|\vec{x}|^2} \hat{x}. \quad (203)$$

Wir fassen also zusammen

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} Q \frac{\vec{x}}{R^3} & \text{für } |\vec{x}| \leq R, \\ Q \frac{1}{|\vec{x}|^2} \hat{x} & \text{für } |\vec{x}| \geq R \end{cases} \quad (204)$$

bzw. für das Potential

$$\hat{\Phi}'(r) = \begin{cases} -Q \frac{r}{R^3} & \text{für } r \leq R, \\ -Q \frac{1}{r^2} & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (205)$$

und daher

$$\hat{\Phi}(r) = \begin{cases} -Q \frac{r^2}{2R^3} + C_{<} & \text{für } r \leq R, \\ Q \frac{1}{r} + C_{>} & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (206)$$

mit $C_{<}, C_{>} \in \mathbb{R}$. Da die Ableitung des Potentials auch bei $r = R$ endlich ist, siehe Eq. (205), muss das Potential dort stetig sein. Daraus folgt

$$C_{<} = Q \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) + C_{>} = Q \frac{3}{2R} + C_{>}. \quad (207)$$

Da wir eine beliebige Konstante zum Potential addieren können, ohne die Kraft zu verändern, können wir $C_{>} = 0$ setzen. Wir finden dann

$$\hat{\Phi}(r) = \begin{cases} Q \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right) & \text{für } r \leq R, \\ Q \frac{1}{r} & \text{für } r \geq R. \end{cases} \quad (208)$$

3.3 Elektrostatische Energie

- Erinnerung: Die vom Kraftfeld \vec{F} entsprechende Arbeit, die entlang eines Weges γ verrichtet wird ist

$$W_\gamma \equiv \int_\gamma dx \cdot \vec{F}(x). \quad (209)$$

Wir definieren nun auch die Arbeit um gegen das Kraftfeld entlang eines Weges zu wirken als

$$\tilde{W}_\gamma \equiv \int_\gamma dx \cdot \tilde{\vec{F}}(x) = - \int_\gamma dx \cdot \vec{F}(x) \quad (210)$$

mit $\tilde{\vec{F}} = -\vec{F}$.

- Die Arbeit um eine Probeladung q entlang eines Weges γ im elektrostatischen Feld $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$ zu bewegen ist also

$$\tilde{W}_\gamma = -q \int_\gamma dx \cdot \vec{E}(x) = q \int_\gamma dx \cdot \text{grad } \Phi(x). \quad (211)$$

Wir parametrisieren den Weg durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$. Dann gilt

$$\tilde{W}_{12} \equiv q \int_\gamma dx \cdot \text{grad } \Phi(x) \quad (212)$$

$$= q \int_0^1 d\lambda \frac{\partial \gamma_i(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \gamma_i(\lambda)} \Phi(\gamma(\lambda)) \quad (213)$$

$$= q \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} \Phi(\gamma(\lambda)) = q(\Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0))). \quad (214)$$

Da die Coulomb Kraft konservativ ist, finden wir also wieder, dass die Arbeit nur vom Anfangsort und Endort

$$\vec{r}_1 \equiv \gamma(0), \quad \vec{r}_2 \equiv \gamma(1) \quad (215)$$

abhängt mit

$$\tilde{W}_{12} = q(\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)). \quad (216)$$

Wir definieren nun die Spannung als die Potentialdifferenz

$$U_{12} \equiv \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) \quad (217)$$

mit

$$\tilde{W}_{12} = qU_{12}. \quad (218)$$

- Gegeben Sei nun ein externes Feld mit Potential Φ_{ext} . Wenn die dem Potential zu Grunde liegende Ladungsverteilung lokalisiert ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit das Potential $\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_1)$ im Unendlichen ($|\vec{r}_1| \rightarrow \infty$) gleich Null setzen.

Die Arbeit um eine Probeladung in diesem externen Potential vom Unendlichen zum Ort \vec{r} zu bewegen ist dann

$$W_{\text{ext}} = q\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}). \quad (219)$$

Wenn wir statt einer einzelnen Probeladung eine Ladungsverteilung ρ betrachten, ist

$$W_{\text{ext}} = \int_{\mathbb{R}^3} dx \rho(x) \Phi_{\text{ext}}(x). \quad (220)$$

- Als nächstes betrachten wir die Arbeit, die nötig ist um N Punktladungen q_1, \dots, q_N vom Unendlichen nacheinander zu den Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ zu bewegen. Dafür gilt

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i(\vec{r}_i) \quad (221)$$

wobei Φ_i das Potential ist, welches von den vorherigen Ladungen q_j mit $j < i$ erzeugt wird, also

$$\Phi_i(\vec{x}) = \sum_{j < i} \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{r}_j|}. \quad (222)$$

Daher gilt

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (223)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (224)$$

Wir nennen diese Arbeit auch die Elektrostatistische Energie der Ladungsverteilung.

- Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ρ (keine Punktladungen) gilt dann für die elektrostatistische Energie

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} \quad (225)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \rho(x)\Phi(x) \quad (226)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx (\Delta\Phi(x))\Phi(x) \quad (227)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx (\nabla\Phi(x)) \cdot (\nabla\Phi(x)) \quad (228)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \vec{E}(x) \cdot \vec{E}(x) \quad (229)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx |\vec{E}(x)|^2 \quad (230)$$

mit der Poisson-Gleichung und dem ersten Greenschen Satz. Wir können

$$w(x) \equiv \frac{|\vec{E}(x)|^2}{8\pi} \quad (231)$$

also als Energiedichte des elektrostatistischen Feldes interpretieren.

- Beispiel: Homogen geladene Kugel. Aus

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} Q \frac{\vec{x}}{R^3} & \text{für } |\vec{x}| \leq R, \\ Q \frac{1}{|\vec{x}|^2} \hat{x} & \text{für } |\vec{x}| \geq R \end{cases} \quad (232)$$

folgt dann

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R dr r^2 Q^2 \frac{r^2}{R^6} + \frac{1}{2} \int_R^\infty dr r^2 Q^2 \frac{1}{r^4} \quad (233)$$

$$= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{5} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}. \quad (234)$$

3.4 Elektrischer Leiter

- Definiere Leiter als offene Region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ($\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$) in der sich elektrische Ladungen kräftefrei bewegen können, also

$$(\forall x \in \Omega)(\vec{E}(x) = 0) \quad (235)$$

und daher auch

$$(\forall x \in \Omega)(\text{grad } \Phi(x) = 0) \quad (236)$$

bzw.

$$(\forall x \in \Omega)(\Phi(x) = \Phi_0) \quad (237)$$

mit $\Phi_0 \in \mathbb{R}$. Diskussion hier ohne Einheiten.

- Aus $4\pi\rho = \operatorname{div} \vec{E} = -\Delta\Phi$ folgt innerhalb des Leiters dann

$$(\forall x \in \Omega)(\rho(x) = 0). \quad (238)$$

- Nehme nun an, dass ausserhalb des Leiters ein nichtverschwindendes elektrisches Feld herrscht, dann muss am Rand $\partial\Omega$ eine Ladung induziert werden damit im Inneren von Ω das elektrische Feld verschwindet:

Seien $\hat{n}_\perp, \hat{n}_{\parallel_1}, \hat{n}_{\parallel_2} \in \mathbb{R}^3$ orthonormale Vektoren, so dass lokal um $x_0 \in \partial\Omega$, \hat{n}_\perp aus Ω heraus zeigt und \hat{n}_{\parallel_i} parallel zur Oberfläche $\partial\Omega$ sind. Wir definieren nun

$$V = \{x_0 + \lambda_i \hat{n}_i \mid \lambda_i \in]-\varepsilon, \varepsilon[\} \quad (239)$$

für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$Q_V = \int_V dx \rho(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dx \cdot \vec{E}(x) \quad (240)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \hat{n}_\perp \cdot \vec{E}(x_0) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (241)$$

und wir eine lokale Flächenladungsdichte

$$\sigma(x_0) \equiv \frac{\hat{n}_\perp \cdot \vec{E}(x_0)}{4\pi} \quad (242)$$

finden. Da \vec{E} innerhalb von Ω verschwindet ist

$$\hat{n}_\perp \cdot \vec{E} \quad (243)$$

an der Grenzfläche **nicht stetig**.

Des weiteren gilt der Satz von Stokes für

$$A = \{x_0 + \lambda_\perp \hat{n}_\perp + \lambda_{\parallel} \hat{n}_{\parallel} \mid \lambda_i \in]-\varepsilon, \varepsilon[\} \quad (244)$$

für \hat{n}_{\parallel} lokal parallel zu $\partial\Omega$ und daher

$$0 = \int_{\partial A} dx \cdot \vec{E}(x) = \hat{n}_{\parallel} \cdot \vec{E}(x_0) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (245)$$

bzw.

$$0 = \hat{n}_{\parallel} \cdot \vec{E}(x_0). \quad (246)$$

Da \vec{E} innerhalb von Ω verschwindet ist

$$\hat{n}_{\parallel} \cdot \vec{E} \quad (247)$$

an der Grenzfläche **stetig**.

3.5 Randwertprobleme

- Betrachte nun folgenden Fall: Wir kennen ρ nur innerhalb von $V \subset \mathbb{R}^3$, wissen aber bereits etwas über das Potential (oder dessen Gradienten) am Rand ∂V .
- Arten von Randbedingungen:
 - **Dirichlet:** Kenne $\Phi(x)$ für alle $x \in \partial V$. Beispiel: geerdete Leiterplatte
 - **von Neumann:** Kenne $\hat{n}_\perp \cdot \text{grad } \Phi(x)$ für alle $x \in \partial V$ mit \hat{n}_\perp einem Normalvektor, welcher in V hinein zeigt. Beispiel: Leiter mit bekannter Flächenladungsdichte (Vergleiche letztes Kapitel $V = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$).
 - **Cauchy:** Mischung aus Dirichlet und von Neumann
- Lösung mittels Greenscher Funktionen: Starte vom 2. Greenschen Satz

$$\int_{\varphi} dy \cdot (g(y)\nabla h(y) - h(y)\nabla g(y)) = \int_{\Omega} dy (g(y)\Delta h(y) - h(y)\Delta g(y)) \quad (248)$$

mit $\Omega = V$, $g = \Phi$ und einem $h = G_x$ mit $G_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ welches für $y \in V$,

$$(\Delta G_x)(y) = -4\pi\delta^{(3)}(y - x). \quad (249)$$

erfüllt. Wir nennen eine solche Funktion auch Greens Funktion. Wir finden dann

$$\int_{\varphi} dy \cdot (\Phi(y)\nabla G_x(y) - G_x(y)\nabla\Phi(y)) = -4\pi\Phi(x) + 4\pi \int_V dy G_x(y)\rho(y)$$

durch die Poisson-Gleichung. Wir lösen nach Φ auf

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_V dy G_x(y)\rho(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} dy \cdot (G_x(y)\nabla\Phi(y) - \Phi(y)\nabla G_x(y)). \end{aligned} \quad (250)$$

Wir setzen nun an (Blatt 2)

$$G_x(y) = \frac{1}{|x - y|} + \tilde{G}_x(y) \quad (251)$$

für ein \tilde{G}_x mit

$$(\forall x, y \in V)(\Delta\tilde{G}_x(y) = 0). \quad (252)$$

Wir nennen \tilde{G}_x auch homogene Lösung. Im allgemeinen Fall, wählen wir nun \tilde{G}_x so, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Für $V = \mathbb{R}^3$ und $\tilde{G}_x = 0$ ergibt sich wieder die bekannte Beziehung

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\rho(y)}{|x - y|}. \quad (253)$$

- Für Dirichlet Randbedingungen wählen wir \tilde{G}_x so, dass $G_x(y) = 0$ für $y \in \partial V$ und daher

$$\Phi(x) = \int_V dy G_x(y) \rho(y) - \frac{1}{4\pi} \int_\varphi dy \cdot (\Phi(y) \nabla G_x(y)). \quad (254)$$

Wir besprechen im Verlauf der Vorlesung eine Methode um \tilde{G}_x entsprechend zu bestimmen.

- Für von Neumann Randbedingung können wir nicht $\nabla G_x(y) = 0$ für $y \in \partial V$ wählen, siehe Übungsblatt 4. Wir wählen daher \tilde{G}_x so, dass $\nabla G_x(y) = n(y)$ für $y \in \partial V$ mit Vektorfeld n welches von x unabhängig ist. Daher

$$\Phi(x) = \int_V dy G_x(y) \rho(y) + \frac{1}{4\pi} \int_\varphi dy \cdot G_x(y) \nabla \Phi(y) - \Phi_0 \quad (255)$$

mit irrelevanter x -unabhängiger Konstante

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_\varphi dy \cdot \Phi(y) n(y). \quad (256)$$

- Eindeutigkeit der Lösung: Gegeben seine zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2 , dann definieren wir

$$\Psi = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (257)$$

und es gilt

$$\Delta \Psi(x) = -4\pi(\rho(x) - \rho(x)) = 0 \quad (258)$$

mit der Poisson Gleichung für $x \in V$. Für $y \in \partial V$ gilt ausserdem $\Psi(y) = 0$ im Dirichlet Fall und $\nabla \Psi(y) = 0$ im von Neumann Fall. Wir benutzen nun den ersten Greenschen Satz

$$\int_\varphi dx \cdot (g(x) \nabla h(x)) = \int_\Omega dx \left((\nabla g(x)) \cdot (\nabla h(x)) + g(x) \Delta h(x) \right) \quad (259)$$

mit $g = h = \Psi$ und $\Omega = V$ und finden daher

$$0 = \int_\varphi dx \cdot (\Psi(x) \nabla \Psi(x)) = \int_V dx |\nabla \Psi(x)|^2. \quad (260)$$

Da $|\nabla \Psi(x)| \geq 0$ kann dies nur erfüllt sein, wenn

$$\nabla \Psi(x) = 0 \quad (261)$$

bzw. konstantem $\Psi(x)$ für alle $x \in V$. Daher folgt also, dass sich Φ_1 und Φ_2 nur durch eine Konstante unterscheiden können, welche irrelevant für \vec{E} ist. Im Dirichlet Fall folgt aus der Stetigkeit von Φ bei ∂V (endliches $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$), dass die Konstante verschwindet.

- Beispiel: Faradayscher Käfig: Gegeben sei ein Volumen V mit

$$(\forall x \in V)(\rho(x) = 0) \quad (262)$$

begrenzt durch einen Leiter, d.h.,

$$(\forall x \in \partial V)(\Phi(x) = \Phi_0) \quad (263)$$

mit konstantem Φ_0 . Es folgt also

$$\Phi(x) = \int_V dy G_x(y) \underbrace{\rho(y)}_{=0} - \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} dy \cdot \left(\underbrace{\Phi(y)}_{=\Phi_0} \nabla G_x(y) \right) \quad (264)$$

$$= -\frac{\Phi_0}{4\pi} \int_V dy \Delta G_x(y) = \Phi_0 \int_V dy \delta^{(3)}(y-x) = \Phi_0 \quad (265)$$

mit dem Satz von Gauss. Daher folgt für einen Faradayschen Käfig

$$(\forall x \in V)(\vec{E}(x) = 0). \quad (266)$$

- **Methode der Bildladungen:** Wir lösen das Randwertproblem (finden die Greens Funktion) indem wir eine künstliche Bildladungsdichte ρ_{bild} ausserhalb von V definieren, wobei ρ_{bild} so gewählt ist, dass für eine Gesamtverteilung

$$\rho_{\text{total}}(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{falls } x \in V, \\ \rho_{\text{bild}}(x) & \text{falls } x \notin V. \end{cases} \quad (267)$$

die Randbedingungen der Felder auf ∂V erfüllt sind.

Beispiel 1: Punktladung über geerdeter Leiterplatte. Wir setzen

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\} \quad (268)$$

und daher

$$\partial V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}. \quad (269)$$

Und eine Punktladung q am Ort

$$\vec{r}_q \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_q \end{pmatrix} \quad (270)$$

mit

$$\rho(\vec{r}) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q). \quad (271)$$

Für eine geerdete Leiterplatte gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$(\forall \vec{r} \in \partial V)(\Phi(\vec{r}) = 0), \quad (272)$$

siehe Kapitel 3.4. Wenn wir nun für eine Bildladung q_B am Ort $\vec{r}_B \in \mathbb{R}^3 \setminus V$ ansetzen

$$\rho_{\text{bild}}(\vec{r}) = q_B \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_B) \quad (273)$$

dann gilt

$$\Phi(\vec{r}) = q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} + q_B \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_B|}. \quad (274)$$

Dies erfüllt Gleichung (272) für eine an ∂V gespiegelte Bildladung

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus V \quad (275)$$

mit $q_B = -q$, da

$$(\forall \vec{r} \in \partial V)(|\vec{r} - \vec{r}_q| = |\vec{r} - \vec{r}_B|). \quad (276)$$

Es folgt also für ein $\vec{r} \in V$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \Phi(\vec{r}) = q \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_B}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} \right) \quad (277)$$

und auf der Grenzfläche $\vec{r} \in \partial V$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2qz_q \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_q^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (278)$$

mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (279)$$

Wie bereits in Kapitel 3.4 besprochen finden wir mit $\vec{r} \in \partial V$, dass

$$\hat{n}_{\parallel} \cdot \vec{E} = 0 \quad (280)$$

und mit (aus Leiter herauszeigend)

$$\hat{n}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (281)$$

die Flächenladungsdichte

$$\sigma(x, y) = \frac{\hat{n}_\perp \cdot \vec{E}(x, y, 0)}{4\pi} = -qz_q \frac{1}{2\pi(x^2 + y^2 + z_q^2)^{3/2}}. \quad (282)$$

Daraus ergibt sich auch eine auf der Leiterplatte induzierte Gesamtladung

$$q_{\text{ind}} \equiv \int dx dy \sigma(x, y) = -qz_q \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2\pi(r^2 + z_q^2)^{3/2}} \quad (283)$$

$$= -qz_q \int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 + z_q^2)^{3/2}} = -qz_q \left[-(r^2 + z_q^2)^{-1/2} \right]_0^\infty = -\frac{qz_q}{|z_q|} = -q. \quad (284)$$

Das von der induzierten Ladung erzeugte elektrische Feld muss dem der Bildladung entsprechen, weshalb von der Leiterplatte auf die Ladung q eine Kraft

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{(2z_q)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (285)$$

wirkt.

- Die entsprechende Greensche Funktion zu dieser Bildladungskonfiguration ist

$$G_x(y) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - f_{\text{bild}}(y)|} \quad (286)$$

mit

$$f_{\text{bild}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}. \quad (287)$$

Dafür gilt dann wie für Dirichlet Randbedingungen gefordert, dass

$$(\forall y \in \partial V)(G_x(y) = 0), \quad (288)$$

da

$$(\forall y \in \partial V)(|x - y| = |x - f_{\text{bild}}(y)|). \quad (289)$$

Des weitern ist

$$\tilde{G}_x(y) = -\frac{1}{|x - f_{\text{bild}}(y)|} \quad (290)$$

und da

$$(\forall y \in V)(f_{\text{bild}}(y) \notin V) \quad (291)$$

gilt

$$(\forall x, y \in V)(\Delta \tilde{G}_x(y) = 0). \quad (292)$$

Beachte: G_x hängt nur von ∂V ab und es gilt also für eine beliebige Ladungsdichte ρ und Dirichlet Randbedingung Φ auf ∂V , dass

$$\Phi(x) = \int_V dy G_x(y) \rho(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} dy \cdot (\Phi(y) \nabla G_x(y)). \quad (293)$$

In den Übungen finden Sie dann die Greensche Funktion für ein Kugelvolumen V .

3.6 Kondensator

- Definition eines Kondensators:

- N Leiter (siehe Kapitel 3.4) mit disjunkten Volumen $M_i \subset \mathbb{R}^3$. Definiere $V = \mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_N)$. Dann gilt

$$\partial V = \partial M_1 \cup \dots \cup \partial M_N. \quad (294)$$

- Ausserhalb der Leiter keine Ladung, also

$$(\forall x \in V)(\rho(x) = 0) \quad (295)$$

und daher

$$(\forall x \in V)(\Delta \Phi(x) = 0). \quad (296)$$

- Potential konstant auf M_i mit

$$(\forall x \in M_i)(\Phi(x) = \Phi_i) \quad (297)$$

und Oberflächenladungen

$$Q_i = \int_{\partial M_i} dx \rho(x). \quad (298)$$

- Unter Skalierung der Potentiale skaliert das entsprechende elektrische Feld und daher (Kapitel 3.4) auch die Oberflächenladungen:

$$\Phi_i \rightarrow \alpha \Phi_i, \quad Q_i \rightarrow \alpha Q_i. \quad (299)$$

Es muss also ein linearer Zusammenhang gelten

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j \quad (300)$$

mit einer $N \times N$ Matrix C . Wir nennen diese Matrix auch **Kapazität** des Kondensators.

- Sei nun $N = 2$ und $Q_1 = -Q_2$, dann gilt

$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2, \quad (301)$$

$$Q_2 = C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 \quad (302)$$

und da $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$ und daher Q_i nur von Potentialdifferenzen abhängen können muss gelten

$$C_{11} = -C_{12}, \quad C_{21} = -C_{22} \quad (303)$$

und wegen $Q_1 = -Q_2$ auch

$$C_{11} = -C_{21}. \quad (304)$$

Mit

$$C \equiv C_{11} \quad (305)$$

gilt also

$$Q_1 = C(\Phi_1 - \Phi_2) = -C(\Phi_1 - \Phi_2) = -Q_2 \quad (306)$$

bzw. mit

$$U \equiv \Phi_1 - \Phi_2, \quad Q \equiv Q_1 = -Q_2 \quad (307)$$

gilt

$$Q = CU \quad (308)$$

mit Kapazität C und Spannung U . Einem jeden solchen Kondensator ist also eine Kapazität C zuzuordnen.

- Einheiten: Zuerst im aktuellen **Gauss System**: Aus Definition des elektrischen Feldes folgt

$$[E] = \frac{\text{LE}}{\text{cm}^2} \quad (309)$$

und dann aus $E = -\text{grad } \Phi$, dass

$$[\Phi] = \text{cm}[E] = \frac{\text{LE}}{\text{cm}}. \quad (310)$$

Da $[Q] = \text{LE}$ und $[U] = [\Phi]$ folgt nun

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \text{cm}. \quad (311)$$

Wir erhalten das **SI System** aus der Redefinition der Ladung und absorption aller k_e -Abhängigkeit in das elektrische Feld, so dass auch im SI System $\vec{F} = q\vec{E}$ gilt. Daraus folgt

$$[E] = \frac{[k_e]C}{m^2} = \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \quad (312)$$

mit der Definition eines Volts (hier wiederholt)

$$V = \frac{Nm}{C} \quad (313)$$

und daher

$$[\Phi] = m[E] = V. \quad (314)$$

Mit

$$[Q] = C \quad (315)$$

ist dann im SI System

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[\Phi]} = \frac{C}{V} \equiv F \quad (316)$$

wodurch wir ein Farad F definiert haben.

- Zuerst geladene unendliche Platte: Wir definieren

$$\rho(x, y, z) = \delta(z)\sigma \quad (317)$$

und daher

$$\vec{E}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} dy \rho(y) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} = \sigma \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 (y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (318)$$

$$= \sigma \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 (y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (319)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} 2\pi\sigma \int_0^\infty dr r (r^2 + x_3^2)^{-3/2} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} 2\pi\sigma \left((r^2 + x_3^2)^{-1/2} \right)_0^\infty \quad (320)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{Sign}(x_3) \end{pmatrix} 2\pi\sigma \quad (321)$$

mit Variablentransformation $x_1 - y_1 \rightarrow y_1$ und Antisymmetrie unter $y_1 \rightarrow -y_1$ und $y_2 \rightarrow -y_2$.

- Plattenkondensator: Zwei solche geladene unendliche Platten mit Ladungsdichte σ bei $z = 0$ und mit $-\sigma$ bei $z = d$. Wegen Superpositionsprinzip verschwindet das Feld ausserhalb des Kondensators und ist im Inneren:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\pi\sigma \end{pmatrix}. \quad (322)$$

Mit $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$ ist das entsprechende Potential (o.B.d.A.)

$$\Phi(x, y, z) = -4\pi\sigma z. \quad (323)$$

Die Ladung auf einem Flächenelement A in der $x - y$ Ebene bei $z = 0$ ist dann

$$Q = \sigma A \quad (324)$$

und die Spannung

$$U = \Phi(z = 0) - \Phi(z = d) = 4\pi\sigma d. \quad (325)$$

Die Kapazität eines Plattenkondensators mit Fläche A und Plattenabstand d ist also

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A}{4\pi d}. \quad (326)$$

- Kugelkondensator (Uebungsblatt)

3.7 Separationsansatz

- Wir befassen uns mit dem Randwertproblem mit verschwindender Ladung in V , i.e.,

$$(\forall r \in V)(\Delta\Phi(r) = 0). \quad (327)$$

- Idee:

1. Mache einen Ansatz für eine Lösung, welcher die Abhängigkeit der Raumkoordinaten separiert.
2. Erstelle eine allgemeine Linearkombination solcher Lösungen.
3. Bestimme Parameter der Lösung um Randbedingungen zu erfüllen.
4. Falls das möglich ist, folgt aus der bereits gezeigten Eindeutigkeit der Lösung, dass wir die allgemeine Lösung gefunden haben.

- Kartesische Koordinaten: Mit dem Ansatz

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^3 K_i(x_i) \quad (328)$$

und $K_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ finden wir für

$$0 = \Delta \Phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Phi(x_1, x_2, x_3) \quad (329)$$

$$= K_1''(x_1)K_2(x_2)K_3(x_3) + K_1(x_1)K_2''(x_2)K_3(x_3) \\ + K_1(x_1)K_2(x_2)K_3''(x_3). \quad (330)$$

Wir nehmen nun noch an, dass $\Phi \neq 0$, teilen nun die Gleichung durch $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ und finden

$$0 = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i''(x_i)}{K_i(x_i)}. \quad (331)$$

Da diese Gleichung für alle x_1, x_2 und x_3 gelten muss, müssen die individuellen Brüche selbst konstant sein, d.h., wir haben

$$\frac{K_i''(x_i)}{K_i(x_i)} = \alpha_i, \quad 0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \quad (332)$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $i \in \{1, 2, 3\}$. Es gilt also

$$K_i(x_i) = \beta_i^+ e^{\sqrt{\alpha_i} x_i} + \beta_i^- e^{-\sqrt{\alpha_i} x_i}. \quad (333)$$

Wir wählen $\beta_i^\pm \in \mathbb{C}$ so, dass $K_i(x_i) \in \mathbb{R}$ und die geforderten Randbedingungen erfüllt sind.

Beispiel (Rechteck-Zylinder): Sei

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \wedge x < l \wedge y > 0 \wedge y < l\} \quad (334)$$

mit $l \in \mathbb{R}^+$ und als Randbedingung

$$\Phi(x, 0, z) = \Phi(x, l, z) = \Phi(0, y, z) = 0, \quad \Phi(l, y, z) = V(y). \quad (335)$$

mit einem $V : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V(0) = V(l) = 0$. Da das ganze Problem explizit z -unabhängig ist, folgt bereits $K_3'(z) = 0$ und daher $\alpha_3 = 0$. Die Konstante K_3 kann dann o.B.d.A. in K_1 absorbiert werden. Daher setzen wir $K_3(z) = 1$. Aus den ersten drei Randbedingungen folgt

$$\beta_1^+ + \beta_1^- = 0, \quad (336)$$

$$\beta_2^+ + \beta_2^- = 0, \quad (337)$$

$$\beta_2^+ e^{\sqrt{\alpha_2} l} + \beta_2^- e^{-\sqrt{\alpha_2} l} = 0 \quad (338)$$

und daher

$$\beta_2^+ (e^{\sqrt{\alpha_2} l} - e^{-\sqrt{\alpha_2} l}) = 0 \quad (339)$$

was eine nicht-triviale Lösung ($K_2 \neq 0$) nur mit

$$\sqrt{\alpha_2}l = -\sqrt{\alpha_2}l + 2\pi ni \quad (340)$$

mit beliebigem $n \in \mathbb{Z}$ erlaubt. Es folgt

$$\alpha_2 = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = -\alpha_1. \quad (341)$$

Alle bisherigen Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zu

$$K_1(x) = \beta_1 \sinh\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (342)$$

$$K_2(y) = \beta_2 \sin\left(\frac{\pi n}{l}y\right) \quad (343)$$

mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Wir können nun eine allgemeine Lösung als Linearkombinationen von

$$\Phi_n(x, y, z) = \sinh\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}y\right) \quad (344)$$

bilden. Da $\Phi_{-n} = \Phi_n$ und $\Phi_0 = 0$ reicht es über $n \in \mathbb{N}^+$ zu summieren, i.e.,

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, y, z) \quad (345)$$

mit $c_n \in \mathbb{R}$. Diese Koeffizienten bestimmen wir nun so, dass die letzte Randbedingung

$$\Phi(l, y, z) = V(y) \quad (346)$$

erfüllt ist. Dies schreiben wir als

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(\pi n) \sin\left(\frac{\pi n}{l}y\right) = V(y). \quad (347)$$

Mit

$$\int_0^l dy \sin\left(\frac{\pi n}{l}y\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l}y\right) = \frac{l}{2} \delta_{mn} \quad (348)$$

finden wir

$$c_n = \frac{2}{l \sinh(\pi n)} \int_0^l dy \sin\left(\frac{\pi n}{l}y\right) V(y). \quad (349)$$

Die Vollständigkeit der Summe in Gleichung (347) kann mit dem Satz von Weierstrass gezeigt werden.

- Kugelkoordinaten: Wir erinnern uns an den Laplace Operator in Kugelkoordinaten,

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (350)$$

und machen einen Separationsansatz

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{u(r)}{r} p(\theta) q(\phi) \quad (351)$$

und finden daher

$$\frac{\Delta \Phi(r, \theta, \phi)}{\Phi(r, \theta, \phi)} = \frac{u''(r)}{ru(r)} + \frac{(\sin(\theta)p'(\theta))'}{r^3 \sin(\theta)p(\theta)} + \frac{q''(\phi)}{r^3 \sin(\theta)^2 q(\phi)} = 0. \quad (352)$$

Dies können wir auch umformen zu

$$-r^2 \sin(\theta)^2 \frac{u''(r)}{u(r)} - \sin(\theta) \frac{(\sin(\theta)p'(\theta))'}{p(\theta)} = \frac{q''(\phi)}{q(\phi)} \equiv M(r, \theta, \phi). \quad (353)$$

Die linke Seite hängt nur von r und θ ab, daher

$$\frac{\partial}{\partial \phi} M(r, \theta, \phi) = 0 \quad (354)$$

die rechte Seite nur von ϕ , daher

$$\frac{\partial}{\partial \theta} M(r, \theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} M(r, \theta, \phi) = 0 \quad (355)$$

also muss $M(r, \theta, \phi)$ konstant sein. Wähle hier

$$-m^2 = \frac{q''(\phi)}{q(\phi)}, \quad m^2 = r^2 \sin(\theta)^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + \sin(\theta) \frac{(\sin(\theta)p'(\theta))'}{p(\theta)} \quad (356)$$

mit Separationskonstante $m \in \mathbb{C}$. Eine allgemeine Lösung für q ist also

$$q(\phi) = \alpha_+ e^{im\phi} + \alpha_- e^{-im\phi}. \quad (357)$$

Da $q(0) = q(2\pi)$ gelten muss folgt, dass $m \in \mathbb{Z}$. Da der α_- Term aus dem α_+ Term mit $m \rightarrow -m$ folgt und wir noch Linearkombinationen betrachten werden, reicht es sich auf

$$q_m(\phi) = e^{im\phi} \quad (358)$$

einzu beschränken. Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^{2\pi} d\phi (q_m(\phi))^* q_{m'}(\phi) = 2\pi \delta_{m,m'}. \quad (359)$$

In der verbleibenden Gleichung sortieren wir wieder nach r und θ Abhängigkeiten

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} = \frac{m^2}{\sin(\theta)^2} - \frac{(\sin(\theta)p'(\theta))'}{p(\theta)\sin(\theta)} = \lambda \quad (360)$$

mit neuer Separationskonstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Radialgleichung lautet also

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} = \lambda \quad (361)$$

und mit $x = \cos(\theta)$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} = -\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial x} \quad (362)$$

und daher für $p(\theta) \equiv P(x)$ dann

$$\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} = -\frac{((1-x^2)P'(x))'}{P(x)} \quad (363)$$

bzw.

$$((1-x^2)P'(x))' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0. \quad (364)$$

Die Radialgleichung wird gelöst durch

$$u_l(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l} \quad (365)$$

mit $a_l, b_l \in \mathbb{R}$ da

$$r^2 u_l''(r) = l(l+1)u_l(r) \quad (366)$$

mit $\lambda = l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}$ (diese Einschränkung wird auf dem Übungsblatt erklärt).

Für $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leq l$ kann eine allgemeine Lösung für P durch die **zugeordneten Legendre-Polynome** gefunden werden

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{\partial^{l+m}}{\partial x^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (367)$$

Herleitung auf Übungsblatt.

Beispiele:

$$P_0^0(x) = 1, \quad (368)$$

$$P_1^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}, \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}. \quad (369)$$

Für $m = 0$ nennt man diese auch einfach nur **Legendre-Polynome**

$$P_l(x) = P_l^0(x). \quad (370)$$

Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}. \quad (371)$$

und

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (372)$$

Wir fassen dann die Winkelabhängigkeit in **Kugelflächenfunktionen**

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (373)$$

zusammen mit Orthogonalitätsbeziehung

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi (Y_{lm}(\theta, \phi))^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) \\ &= 2\pi \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{m,m'} \delta_{l,l'} \frac{2}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \end{aligned} \quad (374)$$

$$= \delta_{m,m'} \delta_{l,l'} \quad (375)$$

und

$$(Y_{l,m}(\theta, \phi))^* = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \phi). \quad (376)$$

Man kann ausserdem die **Vollständigkeitsrelationen**

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') \quad (377)$$

zeigen.

Der allgemeine Ansatz in Kugelkoordinaten ist also

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (378)$$

mit $a_{lm}, b_{lm} \in \mathbb{R}$.

- Beispiel: Potential einer Punktladung in Kugelkoordinaten:

Betrachte

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\alpha}} \quad (379)$$

für $|x| = r$, $|x'| = r'$, $\alpha = \hat{x} \cdot \hat{x}'$. Wir definieren nun

$$r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r') \quad (380)$$

und schreiben

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\alpha}} \quad (381)$$

mit

$$t \equiv \frac{r_{<}}{r_{>}}. \quad (382)$$

Wir zeigen auf dem Übungsblatt

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tx}} \Big|_{t=0} \quad (383)$$

und daher folgt aus einer Taylorentwicklung

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\hat{x} \cdot \hat{x}') \frac{t^l}{r_{>}}, \quad (384)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\hat{x} \cdot \hat{x}') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}. \quad (385)$$

Wir verwenden nun noch eine weitere Vollständigkeitsrelation (hier ohne Beweis)

$$P_l(\hat{x} \cdot \hat{x}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (386)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} r' \cos(\phi') \sin(\theta') \\ r' \sin(\phi') \sin(\theta') \\ r' \cos(\theta') \end{pmatrix}. \quad (387)$$

Insgesamt gilt also

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi'). \quad (388)$$

Wenn $r \ll r'$ oder $r \gg r'$ konvergiert diese Summe mit wenigen Termen. Wir untersuchen die Konsequenzen dieser Beobachtung im nächsten Kapitel.

3.8 Multipolentwicklung

- Betrachte nun eine lokalisierte Ladungsverteilung ρ um den Koordinatenursprung mit

$$V \subset \mathbb{R}^3, \quad R \equiv \sup \left\{ |x| \mid x \in V \right\} \in \mathbb{R} \quad (389)$$

und

$$(\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus V)(\rho(x) = 0). \quad (390)$$

- Untersuche nun $\vec{E}(x)$ und

$$\Phi(x) = \int_V dx' \rho(x') \frac{1}{|x - x'|} \quad (391)$$

für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \gg R$ durch Näherung von

$$\frac{1}{|x - x'|} \quad (392)$$

- In Kugelkoordinaten: Mit Notation aus dem letztem Kapitel setzen wir an

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l <}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (393)$$

und daher

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (394)$$

mit **sphärischen Multipolmomenten**

$$q_{lm} \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_V dx' \rho(x') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (395)$$

Man kann die Summe über l auch als Entwicklung in R/r verstehen mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^l c_l(\theta, \phi) \quad (396)$$

und

$$c_l(\theta, \phi) \equiv \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q_{lm}}{R^l} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (397)$$

Wir nennen die Beiträge

- $l = 0$: **Monopol** mit 1 sphärischen Moment q_{00}
- $l = 1$: **Dipol** mit 3 sphärischen Momenten $q_{1,-1}, q_{1,0}, q_{1,1}$
- $l = 2$: **Quadrupol** mit 5 sphärischen Momenten $q_{2,-2}, q_{2,-1}, q_{2,0}, q_{2,1}, q_{2,2}$

Bedeutung von m : zylindersymmetrische Ladungsverteilung: Keine ϕ Abhängigkeit, also nur $m = 0$ Beiträge und daher

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_{l0}}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (398)$$

$$q_{l0} = \int_V dx' \rho(x') r'^l P_l(\cos \theta'). \quad (399)$$

- Beispiel: homogen geladene Kugel mit Ladungsverteilung:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & \text{falls } |\vec{x}| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (400)$$

Wegen Zylindersymmetrie können wir uns auf $m = 0$ einschränken, so dass

$$q_{l0} = 2\pi \int_{-1}^1 dz \int_0^R dr r^{2+l} P_l(z) \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (401)$$

$$= \frac{2\pi R^{l+3}}{l+3} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{-1}^1 dz P_l(z) \quad (402)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{QR^l}{l+3} \int_{-1}^1 dz P_l(z) \quad (403)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{QR^l}{l+3} \int_{-1}^1 dz P_l(z) P_0(z) \quad (404)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{QR^l}{l+3} 2\delta_{l0} \quad (405)$$

$$= QR^l \delta_{l0} \quad (406)$$

da $P_0(z) = 1$ und unter Verwendung der Orthogonalitätsbeziehung der Legendere Polynome. Es gibt als nur einen Monopol-Beitrag!

- In Kartesischen Koordinaten: Entwickle

$$\frac{1}{|x - x'|} \quad (407)$$

als Taylor-Reihe in x'_i . Dazu zuerst

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|x - x'|} = \frac{x_i - x'_i}{|x - x'|^3} \quad (408)$$

und zur nächsten Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|x - x'|} = \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{x_i - x'_i}{|x - x'|^3} \quad (409)$$

$$= -\frac{\delta_{ij}}{|x - x'|^3} + (x_i - x'_i) \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{1}{|x - x'|^3} \quad (410)$$

$$= -\frac{\delta_{ij}}{|x - x'|^3} + \frac{3(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|x - x'|^5}. \quad (411)$$

Daher gilt mit Einsteinscher Summenkonvention

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - x'|} &= \frac{1}{r} + x'_i \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \left(-\frac{\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) + \frac{1}{r} \mathcal{O} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \hat{x}_i \hat{x}'_i + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \hat{x}'_i \hat{x}'_j (3\hat{x}_i \hat{x}_j - \delta_{ij}) + \mathcal{O} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (412)$$

mit $\hat{x} = x/|x|$. Wir definieren nun die Gesamtladung

$$q \equiv \int_V dx' \rho(x'), \quad (413)$$

das **Dipolmoment** (Vektor)

$$p_i \equiv \int_V dx' \rho(x') x'_i \quad (414)$$

und das **Quadrupolmoment** (Matrix)

$$Q_{ij} \equiv \int_V dx' \rho(x') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} |x'|^2), \quad (415)$$

so dass

$$\Phi(x) = \int_V dx' \rho(x') \frac{1}{|x - x'|} \quad (416)$$

$$= \frac{q}{r} + \frac{\hat{x}_i p_i}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{x}_i Q_{ij} \hat{x}_j}{r^3} + \frac{1}{r} \mathcal{O} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \quad (417)$$

Es gilt

$$\text{Tr } Q = 0, \quad Q = Q^T \quad (418)$$

und daher ist Q immer diagonalisierbar (Hauptachsentransformation).

- **Freiheitsgrade:** l entspricht also der Ordnung der Entwicklung in R/r . Für $l = 0$ haben wir nur einen Freiheitsgrad, $m = 0$, was der Gesamtladung q entspricht. Es gilt

$$q = c_0 = q_{00}. \quad (419)$$

Beachte: Ähnliche Notation für q_{lm} und Gesamtladung q . Für $l = 1$ haben wir drei Freiheitsgrade p_0, p_1, p_2 und $m = -1, 0, 1$. Es gilt

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_V dx' \rho(x') r' Y_{1,-1}^*(\theta', \phi') \quad (420)$$

$$= \sqrt{2} \int_V dx' \rho(x') r' P_1^{-1}(\cos \theta') e^{i\phi'} \quad (421)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_V dx' \rho(x') r' \sin(\theta') e^{i\phi'} \quad (422)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_V dx' \rho(x') (x'_0 + ix'_1) \quad (423)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_0 + ip_1) \quad (424)$$

mit der Euler Formel. Ähnliche Rechnung:

$$q_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-p_0 + ip_1). \quad (425)$$

Und schliesslich

$$q_{1,0} = \int_V dx' \rho(x') r' \cos \theta' = p_2. \quad (426)$$

Für $l = 2$ gibt es fünf Freiheitsgrade $m = -2, \dots, 2$ und da $Q = Q^T$ und $\text{Tr } Q = 0$ gibt es auch 5 unabhängige Matrixelemente. Der Zusammenhang zwischen Q_{ij} und q_{2m} lässt sich auf ähnliche Weise herstellen.

- Punktmonopol: Das Potential eines reinen Monopols, ($\forall l \neq 0$)($c_l = 0$), ist

$$\Phi(x) = \frac{q}{r} \quad (427)$$

und daher ununterscheidbar von einer Punktladung q am Ursprung.

- Punktdipol: Das Potential eines reinen Dipols, ($\forall l \neq 1$)($c_l = 0$), ist

$$\Phi(x) = \frac{\hat{x}_i p_i}{r^2} \quad (428)$$

und daher

$$\vec{E}(x)_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i p_i}{r^3} \quad (429)$$

$$= -\frac{p_j}{r^3} + \frac{3x_j(x \cdot p)}{r^5} \quad (430)$$

$$= \frac{3x_j(x \cdot p) - r^2 p_j}{r^5}. \quad (431)$$

Dieses Potential ist ununterscheidbar von einem Punktdipol mit Ladungsverteilung

$$\rho(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\delta^{(3)} \left(x - \frac{ph}{2} \right) - \delta^{(3)} \left(x + \frac{ph}{2} \right) \right) \quad (432)$$

$$= -p \cdot \text{grad } \delta^{(3)}(x). \quad (433)$$

Test:

$$\int_V dx \rho(x) x_i = - \int_V dx x_i p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \delta^{(3)}(x) \quad (434)$$

$$= \int_V dx p_j \delta^{(3)}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} x_i \quad (435)$$

$$= \int_V dx p_j \delta^{(3)}(x) \delta_{ij} \quad (436)$$

$$= \int_V dx p_i \delta^{(3)}(x) = p_i. \quad (437)$$

- Punktquadrupol in Übungen
- **Energie im äusseren Feld:** Wir nehmen nun ein externes Feld Φ_{ext} an, welches sich in V nur wenig ändert und von der Ladungsverteilung in V nicht beeinflusst wird. Insbesondere wird Φ_{ext} nicht von Ladungen in V erzeugt, d.h. $(\forall x \in V)(\Delta \Phi_{\text{ext}}(x) = 0)$. Dann ist die Energie

$$W = \int_V dx \rho(x) \Phi_{\text{ext}}(x) \quad (438)$$

$$= \int_V dx \rho(x) (\Phi_{\text{ext}}(0) + x_i \nabla_i \Phi_{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i \nabla_j \Phi_{\text{ext}}(0) + \dots) \quad (439)$$

$$= \int_V dx \rho(x) (\Phi_{\text{ext}}(0) - x_i (\vec{E}_{\text{ext}})_i(0) - \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i (\vec{E}_{\text{ext}})_j(0) + \dots) \quad (440)$$

$$= q \Phi_{\text{ext}}(0) - p_i (\vec{E}_{\text{ext}})_i(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} \nabla_i (\vec{E}_{\text{ext}})_j(0) + \dots \quad (441)$$

da

$$\int_V dx \rho(x) x^2 \delta_{ij} \nabla_i (\vec{E}_{\text{ext}})_j(0) = - \int_V dx \rho(x) x^2 \Delta \Phi_{\text{ext}}(0) = 0. \quad (442)$$

Beispiel: Reiner Dipol

$$W = -p_i (\vec{E}_{\text{ext}})_i(0). \quad (443)$$

Energie ist also minimal, falls p in die gleiche Richtung als \vec{E}_{ext} zeigt.

Für die Kraft des äusseren Feldes auf die Ladungsverteilung gilt

$$\vec{F} = \int_V dx \rho(x) \vec{E}_{\text{ext}}(x) \quad (444)$$

$$= q \vec{E}_{\text{ext}}(0) + (p \cdot \text{grad}) \vec{E}_{\text{ext}}(0) + \dots \quad (445)$$

Daher wirkt in einem homogenen externen Feld ($\text{grad} \vec{E}_{\text{ext}} = 0$) keine Kraft auf einen reinen Dipol!

3.9 Dielektrika

- **Dielektrikum:** Substanz in der Ladungsträger nicht frei beweglich sind
- Bis jetzt: Elektrostatik im Vakuum oder Leiter
- Nun: Elektrostatik in Dielektrika mit äusserem Feld \vec{E}_{extern} und zusätzlichen Ladungen ρ^{extern}
- **Mikroskopische Beschreibung:** Beschreibe das mikroskopische Potential im Dielektrikum (Atome mit polarisierbaren Elektronwolken) durch Dipolnäherung eines einzelnen Atom's am Ort x_i mit Überschuss-Ladung q_i und Dipolmoment p_i :

$$\Phi_i(x) = \frac{q_i}{|x - x_i|} + \frac{p_i \cdot (x - x_i)}{|x - x_i|^3} \quad (446)$$

$$= q_i \frac{1}{|x - x_i|} - p_i \cdot \nabla \frac{1}{|x - x_i|}. \quad (447)$$

Im gesamten Dielektrikum:

$$\Phi(x) = \sum_i \Phi_i(x) \quad (448)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx' \rho^{\text{U}}(x') \frac{1}{|x - x'|} - \int_{\mathbb{R}^3} dx' \pi_i(x') \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - x'|} \quad (449)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx' \left[\rho^{\text{U}}(x') - \pi_i(x') \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \frac{1}{|x - x'|} \quad (450)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx' \left[\rho^{\text{U}}(x') + \pi_i(x') \frac{\partial}{\partial x'_i} \right] \frac{1}{|x - x'|} \quad (451)$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} dx' [\rho^{\text{U}}(x') - (\nabla \cdot \pi)(x')] \frac{1}{|x - x'|} \quad (452)$$

mit Überschuss-Ladungsverteilung ρ^U und Dipol-Verteilung π . Daher gilt

$$\nabla \cdot \vec{E}(x) = -\Delta \Phi(x) \quad (453)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^3} dx' [\rho^U(x') - (\nabla \cdot \pi)(x')] \Delta \frac{1}{|x - x'|} \quad (454)$$

$$= 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} dx' \left[\rho^U(x') - (\nabla \cdot \pi)(x') \right] \delta^{(3)}(x - x') \quad (455)$$

$$= 4\pi \left[\rho^U(x) - \nabla \cdot \pi(x) \right]. \quad (456)$$

- **Makroskopische Betrachtung:** In der Praxis misst man gemittelte mikroskopische Felder über kleines Einheitsvolumen $V \subset \mathbb{R}^3$ (mehrere Atome), definiert durch

$$\langle f \rangle(x) \equiv \frac{1}{|V|} \int_V dx' f(x + x') \quad (457)$$

mit $|V| \equiv \int_V dx$. Definiere explizit

$$\Phi_{\text{makro}} \equiv \langle \Phi \rangle, \quad \vec{E}_{\text{makro}} \equiv \langle \vec{E} \rangle, \quad \rho_{\text{makro}} \equiv \langle \rho \rangle. \quad (458)$$

Wir finden die Feldgleichungen

$$\nabla \times \vec{E}_{\text{makro}} = \nabla \times \langle \vec{E} \rangle = \langle \nabla \times \vec{E} \rangle = 0, \quad (459)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_{\text{makro}} = \nabla \cdot \langle \vec{E} \rangle = \langle \nabla \cdot \vec{E} \rangle = 4\pi \langle \rho \rangle = 4\pi \rho_{\text{makro}}, \quad (460)$$

da

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle f \rangle(x) = \frac{1}{|V|} \int_V dx' \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + x') = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle(x). \quad (461)$$

Daher gilt auch weiterhin

$$\vec{E}_{\text{makro}} = -\text{grad } \Phi_{\text{makro}}. \quad (462)$$

Im Rest dieses Kapitels besprechen wir die gemittelten makroskopischen Felder, schreiben jedoch der Einfachheit halber nur einfach f statt $\langle f \rangle$.

- Es gilt also im Dielektrikum

$$\rho(x) = \rho^U(x) - \nabla \cdot \vec{P}(x) \quad (463)$$

$$= \rho^U(x) + \rho^P(x) \quad (464)$$

mit Polarisationsladungsdichte

$$\rho^P = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (465)$$

und Polarisation

$$\vec{P} \equiv \pi. \quad (466)$$

- Wenn nun noch zusätzlich ein externes Feld \vec{E}_{ext} und eine externe Ladungsdichte ρ_{ext} mit

$$\nabla \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = 4\pi\rho^{\text{extern}} \quad (467)$$

gegeben ist, gilt für das gesamte Elektrische Feld \vec{E}

$$\nabla \cdot \vec{E}(x) = 4\pi [\rho^{\text{U}}(x) + \rho^{\text{extern}}(x)] - 4\pi\nabla \cdot \vec{P}(x). \quad (468)$$

Für die **Dielektrische Verschiebung**

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (469)$$

gilt also

$$\nabla \cdot \vec{D}(x) = 4\pi\rho^{\text{frei}}(x) \quad (470)$$

mit der freien Ladungsdichte

$$\rho^{\text{frei}} \equiv \rho^{\text{U}} + \rho^{\text{extern}}. \quad (471)$$

- Arten von Dielektrika:
 - **(Eigentliches) Dielektrikum:** Externes Feld erzeugt polarisierte Ladungsverteilung (Deformationspolarisation). Beispiel: Helium, Luft, Kohlendioxid bei Raumtemperatur
 - **Paraelektrikum:** Mikroskopische permanente Dipole (Beispiel: H_2O Molekül). Diese mitteln sich ohne \vec{E}_{ext} weg. Mit \vec{E}_{ext} richten sich die mikroskopischen Dipole aus (Orientierungspolarisation).
 - **Ferroelektrikum:** \vec{P} permanent unter einer kritischen Temperatur spontan ausgerichtet
- Ansatz für Di- und Paraelektrikum für hinreichend schwache Felder (lineares Dielektrikum):

$$P_i = \gamma_{ij}E_j. \quad (472)$$

Falls das Dielektrikum noch **isotrop** ist, gilt

$$\gamma_{ij} = \chi_e \delta_{ij} \quad (473)$$

mit **dielektrischer Suszeptibilität** χ_e . Es gilt daher

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} \quad (474)$$

mit **Dielektrizitätskonstante**

$$\varepsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e. \quad (475)$$

Im Vakuum gilt dann einfach $\chi_e = 0$ bzw. $\varepsilon = 1$. Auch ein Leiter kann als $\varepsilon \rightarrow \infty$ Grenzfall betrachtet werden, da in diesem Grenzwert

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{D} \rightarrow 0 \quad (476)$$

gilt.

Beispiele:

- Luft bei 1atm und 18 Grad C: $\varepsilon = 1.00059$
- Wasser bei 18 Grad C: $\varepsilon = 81.1$

- Beispiel: Pattenkondensator mit Dielektrikum zwischen Leiterplatten: Für Flächenladungsdichte σ gilt

$$D = 4\pi\sigma \quad (477)$$

und daher

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \quad (478)$$

und das Potential

$$U = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon}. \quad (479)$$

Die Gesamtladung $Q = A\sigma$ für einen Kondensator mit Fläche A . Schliesslich ist die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{A}{4\pi d}. \quad (480)$$

Für $\varepsilon > 1$ ist die Kapazität also erhöht.

- Elektrostatische Energie: Nun auch Arbeit zur Änderung der Polarisation. Arbeit für Änderung $\rho^{\text{frei}} \rightarrow \rho^{\text{frei}} + \delta\rho$ ist

$$\delta W = \int_{\mathbb{R}^3} dx \delta\rho(x) \Phi(x) \quad (481)$$

mit Änderung $\vec{D} \rightarrow \vec{D} + \delta\vec{D}$

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx (\nabla \cdot \delta\vec{D})(x) \Phi(x) \quad (482)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \delta\vec{D}(x) \cdot \nabla \Phi(x) \quad (483)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \delta\vec{D}(x) \cdot \vec{E}(x) \quad (484)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dx \delta\vec{D}(x) \cdot \vec{D}(x) \quad (485)$$

und daher die gesamte Arbeit

$$W = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_0^D \delta\vec{D}(x) \cdot \vec{D}(x) \quad (486)$$

$$= \varepsilon \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx |\vec{E}(x)|^2. \quad (487)$$

- Verhalten an Grenzflächen: Analog zur Diskussion Leiter, Kapitel 3.4, Grenzfläche zwischen Feld $\vec{D}^{(1)}$ und $\vec{D}^{(2)}$.

Aus $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{frei}}$ folgt

$$\sigma \equiv \frac{\hat{n}_\perp \cdot (\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)})}{4\pi} \quad (488)$$

wobei \hat{n}_\perp in Richtung $\vec{D}^{(1)}$ zeigt und σ eine auf dem Rand induzierte Ladungsdichte ist. Ohne Ladungsdichte gilt also

$$\hat{n}_\perp \cdot \vec{E}^{(1)}\varepsilon_1 = \hat{n}_\perp \cdot \vec{E}^{(2)}\varepsilon_2. \quad (489)$$

Aus $\nabla \times \vec{E} = 0$ folgt

$$\hat{n}_\parallel \cdot (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}) = 0 \quad (490)$$

mit \hat{n}_\parallel parallel zur Grenzfläche.

Dies kann auch auf das Potential umgeschrieben werden in dem man

$$\varepsilon_1 \hat{n}_\perp \cdot \nabla\Phi^{(1)} = \varepsilon_2 \hat{n}_\perp \cdot \nabla\Phi^{(2)} \quad (491)$$

und $\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)}$ fordert (endliches \vec{E}).

Beispiel: Punktladung in Dielektrikum 1 und Übergang zu Dielektrikum 2 als Übungsaufgabe (Blatt 6)

4 Magnetostatik

4.1 Ampère Gesetz und Einheiten

- Wir beschäftigen uns nun mit Ladungen, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Ladungsdichte $\rho(x)$ kombiniert sich dann mit einem Geschwindigkeitsfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto v(x)$ zur Stromdichte

$$j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto j(x) = \rho(x)v(x). \quad (492)$$

- Da Ladung nur bewegt wird, aber nicht erzeugt oder vernichtet, muss die in ein Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ hineinfließende Ladung gleich der herausfließenden Ladung sein, was wir auch als

$$\int_{\partial V} dx \cdot j(x) = 0 \quad (493)$$

schreiben können. Mit dem Satz von Gauss gilt daher auch

$$0 = \int_V dx \nabla \cdot j(x) \quad (494)$$

für ein beliebiges V . Daher muss auch für den Integranden gelten

$$0 = \nabla \cdot j(x). \quad (495)$$

Man nennt dies auch die **Kontinuitätsgleichung**.

- Einheiten: Im SI System gilt also

$$[j] = [\rho][v] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (496)$$

mit einem Ampère

$$\text{A} \equiv \frac{\text{C}}{\text{s}}. \quad (497)$$

Im Gauss System gilt

$$[j] = [\rho][v] = \frac{\text{LE}}{\text{cm}^3} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \frac{\text{LE}}{\text{cm}^2 \text{s}}. \quad (498)$$

- Von einer Stromdichte j_2 wirkt auf Stromdichte j_1 eine durch das Ampère Gesetz beschriebene Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{j_1(x) \times (j_2(x') \times (x - x'))}{|x - x'|^3} \quad (499)$$

mit Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2,99792458 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (500)$$

im Gauss Einheitensystem. Wir erinnern uns an

$$(1 \text{ LE})^2 = 10^{-5} \text{ N} (1 \text{ cm})^2 \quad (501)$$

um die Kraft in N zu bekommen.

4.2 Feldtheorie

- Betrachte nun Kraft einer Quellstromdichte j auf eine Probestromdichte j_P . Durch Definition eines **Magnetfeldes**

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \times \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \quad (502)$$

was auch oft Gesetz von **Biot-Savart** genannt wird, separieren wir wieder den Quell und Probeanteil im Kraftgesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx j_P(x) \times \vec{B}(x). \quad (503)$$

- Für eine mit Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ bewegte Punktprobeladung q am Ort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$j_P(x) = qv\delta^{(3)}(x - x_0) \quad (504)$$

und daher

$$\vec{F}(x_0) = q\frac{v}{c} \times \vec{B}(x_0). \quad (505)$$

- Kombiniert mit der Coulombkraft wirkt auf eine solche Punktprobeladung dann die sogenannte **Lorentzkraft**

$$\vec{F}(x_0) = q \left(\vec{E}(x_0) + \frac{v}{c} \times \vec{B}(x_0) \right). \quad (506)$$

- Einheiten: Im Gauss System gilt

$$[B] = \frac{\text{LE}}{\text{cm}^2} = \text{dyn} = [E]. \quad (507)$$

Im SI Einheitensystem absorbiert man einen Faktor $1/c$ in B , so dass für den Punktladungsfall

$$\vec{F} = qv \times B(x_0) \quad (508)$$

und

$$[B] = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}} \equiv \text{T} \quad (509)$$

mit der so definierten Einheit **Tesla** (T).

- Beispiel (unendlich langer Draht): Übungen

- Vektorpotential: Wir zeigen zunächst

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \times \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \quad (510)$$

$$= -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \times \nabla_x \frac{1}{|x - x'|} \quad (511)$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \nabla_x \times j(x') \frac{1}{|x - x'|} \quad (512)$$

$$= \nabla \times \vec{A}(x) \quad (513)$$

mit **Vektorpotential**

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \frac{1}{|x - x'|}. \quad (514)$$

- **Eichtransformationen**

$$\vec{A}(x) \rightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \nabla \Lambda(x) \quad (515)$$

mit beliebigem Skalarfeld Λ lassen das Magnetfeld invariant, da $\nabla \times \nabla = 0$ und daher

$$\vec{B}'(x) = \nabla \times \vec{A}'(x) = \nabla \times (\vec{A}(x) + \nabla \Lambda(x)) = \nabla \times \vec{A}(x) = \vec{B}(x). \quad (516)$$

Das Vektorpotential ist also nur bis auf Eichtransformationen eindeutig.

Für die in Gleichung (514) gegebene Form gilt

$$\nabla \cdot \vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \nabla_x \cdot \frac{1}{|x - x'|} \quad (517)$$

$$= -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \nabla_{x'} \cdot \frac{1}{|x - x'|} \quad (518)$$

$$\stackrel{P.I.}{=} \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \underbrace{(\nabla \cdot j(x'))}_{=0} \frac{1}{|x - x'|} = 0 \quad (519)$$

wegen der Kontinuitätsgleichung. Wir nennen die Bedingung

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (520)$$

auch die **Coulomb-Eichung**.

- Feldgleichungen: Mit (Übungen)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (521)$$

gilt

$$\nabla \times \vec{B}(x) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}(x)) - \Delta \vec{A}(x) \quad (522)$$

$$= -\Delta \vec{A}(x) \quad (523)$$

$$= -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \Delta_x \frac{1}{|x-x'|} \quad (524)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \delta^{(3)}(x-x') \quad (525)$$

$$= \frac{4\pi}{c} j(x). \quad (526)$$

Es gilt ausserdem

$$\nabla \cdot \vec{B}(x) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(x) = 0. \quad (527)$$

- **Integrale Form:** Für ein stetig differenzierbares $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit zweidimensionalem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi(\Omega) = S$ gilt mit Stokes das **Ampersche Durchflutungsgesetz**

$$\int_{\gamma} dx \cdot \vec{B}(x) = \int_{\varphi} dx \cdot \operatorname{rot} \vec{B}(x) = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_{\varphi} dx \cdot j(x)}_{\equiv I_S} = \frac{4\pi}{c} I_S \quad (528)$$

mit einer Parametrisierung $\gamma : \gamma^{-1}(\partial S) \rightarrow \partial S$ welche den Normalvektor von φ gegen den Uhrzeigersinn umläuft. I_S gibt den durch S fliessenden **Strom** an.

Aus dem Satz von Gauss folgt für ein $V \subset \mathbb{R}^3$

$$0 = \int_V dx \nabla \cdot \vec{B}(x) = \int_{\partial V} dx \cdot \vec{B}(x) \equiv \Phi_{\partial V}^{\operatorname{mag}}, \quad (529)$$

wobei wir hier die explizite Parametrisierung nicht angeben, da das Vorzeichen irrelevant ist. Man nennt $\Phi_{\partial V}^{\operatorname{mag}}$ auch den **magnetischen Fluss** durch die Fläche ∂V , welcher also für eine geschlossene Fläche ∂V verschwindet. Das \vec{B} Feld kann also auch als magnetische Flussdichte angesehen werden.

- **Beispiel:** Unendlich langer Draht mit Radius R und homogenem Strom

$$j(x) = \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} \hat{e}_z & \text{falls } \rho \leq R, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (530)$$

mit

$$\hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (531)$$

und

$$\rho \equiv \sqrt{x_0^2 + x_1^2}. \quad (532)$$

Aus

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' j(x') \frac{1}{|x - x'|} \quad (533)$$

folgt dann dass

$$\vec{A}(x) = \tilde{A}(\rho) \hat{e}_z \quad (534)$$

für ein Skalarfeld \tilde{A} .

Daher gilt für das Magnetfeld

$$\vec{B}_i(x) = (\nabla \times \vec{A})_i(x) = \varepsilon_{ik2} \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{A}(\rho) \quad (535)$$

$$= \left(\delta_{i0} \frac{\partial}{\partial x_1} - \delta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \tilde{A}(\rho) \quad (536)$$

$$= \left(\delta_{i0} \frac{x_1}{\rho} - \delta_{i1} \frac{x_0}{\rho} \right) \tilde{A}'(\rho). \quad (537)$$

Setze nun Zylinderkoordinaten an mit

$$x_0 = \rho \cos(\phi), \quad x_1 = \rho \sin(\phi). \quad (538)$$

Dann ist

$$\vec{B}_i(x) = (\delta_{i0} \sin(\phi) - \delta_{i1} \cos(\phi)) \tilde{A}'(\rho) \quad (539)$$

$$= -\tilde{A}'(\rho) (\hat{e}_\phi)_i \quad (540)$$

mit

$$\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (541)$$

Sei nun

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < R_0^2\} \quad (542)$$

mit Parametrisierung

$$\varphi(x, y) = (x, y, 0) \quad (543)$$

und Normalvektor

$$\vec{n} = \varphi_1 \times \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_z \quad (544)$$

und Parametrisierung des Randes

$$\gamma(\phi) = R_0 \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (545)$$

welche den Normalvektor gegen den Uhrzeigersinn umläuft. Dann gilt mit dem Amperschen Durchflutungsgesetz

$$\int_{\gamma} dx \cdot \vec{B}(x) = -\tilde{A}'(R_0) \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{\gamma'(\phi)}_{=R_0\hat{e}_\phi} \cdot \hat{e}_\phi = -2\pi R_0 \tilde{A}'(R_0) \quad (546)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int_{\varphi} dx \cdot j(x) = \frac{4\pi I}{c} 2\pi \int_0^{R_0} dr r \frac{1}{\pi R^2} \quad (547)$$

$$= \frac{4\pi I \min(R, R_0)^2}{c R^2}. \quad (548)$$

Daher

$$-\tilde{A}'(R_0) = \frac{2I}{cR_0} \frac{\min(R, R_0)^2}{R^2} \quad (549)$$

und

$$\vec{B}(x) = \begin{cases} \hat{e}_\phi \frac{2I\rho}{cR^2} & \text{falls } \rho \leq R, \\ \hat{e}_\phi \frac{2I}{c\rho} & \text{falls } \rho > R. \end{cases} \quad (550)$$

Wir untersuchen nun die Kraft pro Länge l welche von einem solchen Draht mit Strom $I = I_1$ auf einen zweiten unendlich dünnen Probedraht (Stromfaden genannt) mit

$$j_P(x, y, z) = I_2 \delta(x - d) \delta(y) \hat{e}_z \quad (551)$$

und $d > R$ wirkt. Wir finden

$$\frac{\vec{F}}{l} = \frac{1}{cl} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-l/2}^{l/2} dz j_P(x, y, z) \times \vec{B}(x, y, z) \quad (552)$$

$$= \frac{I_2}{cl} \int_{-l/2}^{l/2} dz \hat{e}_z \times \vec{B}(d, 0, z) \quad (553)$$

$$= \frac{I_2}{cl} \frac{2I_1}{cd} \int_{-l/2}^{l/2} dz \hat{e}_z \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (554)$$

$$= -\frac{2I_1 I_2}{c^2 d} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (555)$$

Falls $I_1 I_2 > 0$ ist die Kraft also attraktiv, falls $I_1 I_2 < 0$ ist die Kraft repulsiv.

4.3 Magnetischer Dipol

- Betrachte eine innerhalb von $V \subset \mathbb{R}^3$ um den Koordinatenursprung lokalisierte statische Stromdichte j aus großer Entfernung. Es sei wieder

$$R \equiv \sup\{|x| \mid x \in V\} \in \mathbb{R}. \quad (556)$$

Für eine solche Stromdichte gilt

$$(\forall x \in \partial V)(j(x) = 0) \quad (557)$$

und daher mit dem Satz von Gauss

$$0 = \int_{\partial V} dx_i x_i j_i(x) = \int_V dx \nabla_i x_i j_i(x) \quad (558)$$

$$= \int_V dx j_i(x) + \int_V dx x_i \underbrace{(\nabla \cdot j)}_{=0}(x). \quad (559)$$

für beliebiges i . Es gilt also

$$\int_V dx j(x) = 0. \quad (560)$$

- Für ein $x' \in V$ mit $|x| \gg |x'|$ gilt dann bis zur ersten Ordnung in x'

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot x'}{|x|^3} + O(x')^2 \quad (561)$$

und daher

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int_V dx' \frac{j(x')}{|x - x'|} \quad (562)$$

$$= \frac{1}{|x|} \frac{1}{c} \underbrace{\int_V dx' j(x')}_{=0} + \frac{1}{|x|^3} \frac{1}{c} \int_V dx' j(x')(x \cdot x') + O\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \quad (563)$$

$$= \frac{1}{c|x|^3} \int_V dx' j(x')(x \cdot x') + O\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \quad (564)$$

Es gibt also keinen Monopolanteil. Sie zeigen in den Übungen, dass

$$\int_V dx' j(x')(x \cdot x') = - \int_V dx' x'(x \cdot j(x')) \quad (565)$$

Gemeinsam mit

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \quad (566)$$

gilt dadurch

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{2c|x|^3} \left(\int_V dx' j(x')(x \cdot x') - \int_V dx' x'(x \cdot j(x')) \right) + O\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \quad (567)$$

$$= \frac{1}{2c|x|^3} \int_V dx' x \times (j(x') \times x') + O\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \quad (568)$$

$$= \frac{1}{|x|^3} \mu \times x + O\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \quad (569)$$

mit **magnetischem Dipolmoment**

$$\mu \equiv \frac{1}{2c} \int_V dx' x' \times j(x'). \quad (570)$$

- Für einen reinen magnetischen Dipol am Koordinatenursprung gilt dann (Übungen)

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{|x|^3} \mu \times x, \quad (571)$$

$$\vec{B}(x) = \frac{3\hat{x}(\hat{x} \cdot \mu) - \mu}{|x|^3}, \quad (572)$$

$$j(x) = -c(\mu \times \nabla)\delta^{(3)}(x). \quad (573)$$

Beispiele: Spule, Erdmagnetfeld, Stabmagnet (jeweils in guter Näherung)

- Beispiel: Leiterschleife mit Radius R und Strom I ,

$$j(x, y, z) = \frac{I}{R} \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - R) \delta(z) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (574)$$

Es folgt

$$\mu = \frac{1}{2c} \int_V dx' x' \times j(x') \quad (575)$$

$$= \frac{I}{2c} \int_V dx' \delta(\sqrt{(x'_0)^2 + (x'_1)^2} - R) \delta(x'_2) x' \times \begin{pmatrix} -x'_1 \\ x'_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (576)$$

$$= \frac{I}{2c} \int_V dx' \delta(\sqrt{(x'_0)^2 + (x'_1)^2} - R) \delta(x'_2) \begin{pmatrix} -x'_0 x'_2 \\ -x'_1 x'_2 \\ (x'_0)^2 + (x'_1)^2 \end{pmatrix} \quad (577)$$

$$\stackrel{\text{Zylinderkoord.}}{=} \frac{I}{2c} \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \end{pmatrix} \quad (578)$$

$$= \frac{I\pi R^2}{c} \hat{e}_z. \quad (579)$$

- Beispiel: Rotierender Körper um Achse $\omega \in \mathbb{R}^3$ mit Massendichte ρ_M , Ladungsdichte

$$\rho(x) = \frac{q}{m} \rho_M(x) \quad (580)$$

und Geschwindigkeitsfeld

$$v(x) = \omega \times x \quad (581)$$

mit Gesamtladung q und Gesamtmasse m . Es gilt dann

$$j(x) = \rho(x)v(x) = \rho(x)\omega \times x \quad (582)$$

und daher

$$\mu = \frac{1}{2c} \int_V dx' x' \times j(x') \quad (583)$$

$$= \frac{q}{2cm} \int_V dx' \rho_M(x') x' \times (\omega \times x'). \quad (584)$$

Vergleiche mit dem Drehimpuls

$$L = \int_V dx' \rho_M(x') (x' \times v(x')) \quad (585)$$

$$= \int_V dx' \rho_M(x') x' \times (\omega \times x'). \quad (586)$$

Es gilt also die sogenannte **gyromagnetische Beziehung**

$$\mu = \frac{q}{2cm} L. \quad (587)$$

Falls Ladungsdichte und Massendichte nicht durch Gleichung (580) zueinander in Bezug stehen, findet man im Allgemeinen

$$\mu = g \frac{q}{2cm} L \quad (588)$$

mit **Landé** Faktor g .

Beispiel aus der Quantenmechanik/Quantenfeldtheorie: Elektron hat Impuls L durch intrinsischen Spin. Klassisch gilt für ein solches Elementarteilchen $g = 1$, in der relativistischen Quantenmechanik findet man jedoch $g = 2$ und durch Strahlungskorrekturen in der Quantenfeldtheorie $g \neq 2$. Die Abweichungen $a = (g-2)/2$ definiert man dann als anomales magnetisches Moment, welches experimentell und theoretisch sehr genau bestimmt werden kann

$$a_e^{\text{experiment}} = 0.001159652181643(764), \quad (589)$$

$$a_e^{\text{theorie}} = 0.00115965218073(28). \quad (590)$$

Durch ähnliche Messungen des Elektrons und anderer Fundamenteilchen kann man z.B. Effekte von noch unbekanntem Teilchen suchen.

- Übungen: Dipol im externen magnetischen Feld

4.4 Magnetostatik in Materie

- Betrachte nun Magnetostatik in Materie mit äusserem Feld \vec{B}_{extern} und zusätzlicher Stromdichte Ladungen j^{extern}
- **Mikroskopische Beschreibung:** Beschreibe das mikroskopische Vektorpotential in Materie (Atome/Moleküle/Elementarzellen eines Magneten) durch Dipolnäherung am Ort x_i mit magnetischem Dipolmoment μ_i

$$\vec{A}_i^{\text{magn.}}(x) = \frac{1}{|x - x_i|^3} \mu_i \times (x - x_i) \quad (591)$$

und daher

$$j_i^{\text{magn.}}(x) = -c(\mu_i \times \nabla)\delta^{(3)}(x - x_i). \quad (592)$$

- Auch hier wieder effektive Mittlung über makroskopische Distanzen, definiert **Magnetisierung**

$$\vec{M}(x) \equiv \left\langle \sum_i \mu_i \delta^{(3)}(x - x_i) \right\rangle \quad (593)$$

und daher

$$j^{\text{magn.}}(x) = \left\langle \sum_i j_i^{\text{magn.}}(x) \right\rangle = c \text{rot } \vec{M}(x). \quad (594)$$

- Da kein magnetischer Monopolbeitrag: $j^{\text{frei}} = j^{\text{extern}}$. Insgesamt

$$j = j^{\text{frei}} + j^{\text{magn.}} \quad (595)$$

und daher

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} j = \frac{4\pi}{c} (j^{\text{frei}} + j^{\text{magn.}}) \quad (596)$$

$$= \frac{4\pi}{c} j^{\text{frei}} + 4\pi \text{rot } \vec{M}(x). \quad (597)$$

Wir definieren die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (598)$$

so dass

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j^{\text{frei}}. \quad (599)$$

Es gilt ausserdem weiterhin

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (600)$$

- Im Allgemeinen hängt wieder \vec{H} von \vec{M} ab. Für **lineare Medien** gilt

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (601)$$

mit **magnetischer Suszeptibilität** χ_m . Daher

$$\vec{B} \equiv \mu_r \vec{H} \quad (602)$$

mit **Permeabilitätskonstante**

$$\mu_r \equiv 1 + 4\pi\chi_m. \quad (603)$$

Es gilt damit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_r \frac{4\pi}{c} j^{\text{frei}}. \quad (604)$$

- Arten von linearen Medien:

- **Diamagnet:** $\chi_m < 0$ (induzierte Ströme durch externe Felder, der Ursache entgegengerichtet, siehe Elektrodynamik)
- **Paramagnet:** $\chi_m > 0$ (permanente magnetische Dipole, Ausrichtung im äusseren Feld)
- **Ferromagnet:** Magnetisierung unterhalb einer kritischen Temperatur, Hysterese für $M(B)$ möglich.

- Verhalten an Grenzflächen: Grenzfläche zwischen zwei linearen Medien mit Permeabilitätskonstanten $\mu_1 \neq \mu_2$ mit Feldern $\vec{H}^{(1)}$ und $\vec{H}^{(2)}$. Diskussion analog zu Leiter/Elektrostatik in Dielektrika:

Aus $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ folgt

$$\hat{n}_\perp \cdot (\mu_1 \vec{H}^{(1)} - \mu_2 \vec{H}^{(2)}) = 0 = \hat{n}_\perp \cdot (\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}) \quad (605)$$

wobei \hat{n}_\perp senkrecht zur Grenzfläche in Richtung $\vec{H}^{(1)}$ zeigt.

Aus $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j^{\text{frei}}$ folgt

$$\hat{n}_\parallel \cdot (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \frac{4\pi}{c} (\hat{n}_\perp \times \hat{n}_\parallel) \cdot J^{\text{frei,grenz}}. \quad (606)$$

mit \hat{n}_\parallel parallel zur Grenzfläche und Oberflächenstromdichte (Einheit Strom pro Länge)

$$J^{\text{frei,grenz}}. \quad (607)$$

Man kann zeigen, dass äquivalent gilt

$$\hat{n}_\perp \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \frac{4\pi}{c} J^{\text{frei,grenz}}. \quad (608)$$

Ohne Oberflächenstromdichte gilt also

$$\hat{n}_\parallel \cdot (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = 0 = \hat{n}_\perp \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}). \quad (609)$$

4.5 Zusammenfassung der Elektro- und Magnetostatik

- Zusammenfassung im Gauss System:

	Elektrostatik	Magnetostatik
Quelle	ρ	$j = \rho v$
Kontinuitätsgleichung	—	$\text{div } j = 0$
Feld	\vec{E}	\vec{B}
Feldgleichungen	$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ $\text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}j$
Potential	Φ $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$ $\Delta\Phi = -4\pi\rho$	\vec{A} $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}j$
Kraft	$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\frac{v}{c} \times \vec{B}$
Kraftdichte	$\vec{f} \equiv \rho\vec{E}$	$\vec{f} \equiv \frac{1}{c}j \times \vec{B}$
Materie	Dielektrikum (polarisierbar) Monopol/Überschussladung (ρ^U) Dipol/Polarisation (\vec{P})	magnetisierbar — Dipol/Magnetisierung (\vec{M})
Lineare Medien	$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
Hilfsfelder	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} = \vec{B}/\mu$
Feldgleichung in Materie	$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{frei}}$ $\text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c}j^{\text{frei}}$

- Zusammenhang Gauss System und SI System folgt aus:

$$\rho^{\text{Gauss}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\rho^{\text{SI}}, \quad (610)$$

$$\vec{E}^{\text{Gauss}} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\vec{E}^{\text{SI}}, \quad (611)$$

$$\vec{B}^{\text{Gauss}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\vec{B}^{\text{SI}}, \quad (612)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi k_e}. \quad (613)$$

Daraus folgt z.B.

$$j^{\text{Gauss}} = \rho^{\text{Gauss}} v = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\rho^{\text{SI}} v = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}j^{\text{SI}} \quad (614)$$

und

$$\vec{f} = \frac{1}{c} \vec{j}^{\text{Gauss}} \times \vec{B}^{\text{Gauss}} \quad (615)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \vec{j}^{\text{SI}} \times \vec{B}^{\text{SI}} \quad (616)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \vec{j}^{\text{SI}} \times \vec{B}^{\text{SI}} \quad (617)$$

$$= \vec{j}^{\text{SI}} \times \vec{B}^{\text{SI}}. \quad (618)$$

- Vorschau Relativitätstheorie: Betrachte eine Punktladung q welche sich im Inertialsystem (IS) mit konstanter Geschwindigkeit v bewege. Die Felder in IS seien \vec{E} und \vec{B} und es wirkt eine Kraft

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B} \right) \quad (619)$$

auf die Punktladung. Betrachte nun auch das Inertialsystem IS' in welchem sich q in Ruhe befindet: IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v . In IS' wirkt dann die Kraft

$$\vec{F}' = q' \vec{E}' \quad (620)$$

mit \vec{F}' , \vec{E}' in IS'. Mit $q' = q$ und $\vec{F}' = \vec{F} + O(v^2/c^2)$ aus der Mechanik folgt

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B} + O(v^2/c^2). \quad (621)$$

Was ein elektrisches und was ein magnetisches Feld ist hängt also vom Bezugssystem ab!

5 Elektrodynamik

Ladungsdichten, Stromdichten, elektrische und magnetische Felder können jetzt auch explizit von der Zeit abhängen.

5.1 Faradaysches Induktionsgesetz

- Definiere ein Bezugssystem (Laborsystem) mit inhomogenem Magnetfeld \vec{B}^{Labor} und verschwindendem elektrischen Feld $\vec{E}^{\text{Labor}} = 0$.
- Betrachte nun eine Leiterschleife welche zur Zeit t die Fläche $S(t) \subset \mathbb{R}^3$ umschliesst und sich im Laborsystem mit Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ bewegt. Es gelte $S(t) \cap S(t') = \emptyset$ für $t \neq t'$. Im Ruhesystem des Leiters gilt dann (siehe vorheriges Kapitel)

$$\vec{E}^{\text{Leiter}} = \frac{v}{c} \times \vec{B}^{\text{Labor}} \quad (622)$$

und daher

$$\int_{\partial S(t)} dx \cdot \vec{E}^{\text{Leiter}} = \int_{\partial S(t)} dx \cdot \left(\frac{v}{c} \times \vec{B}^{\text{Labor}} \right). \quad (623)$$

Für ein infinitesimales δt gilt wegen $dx \cdot (v dt \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (dx \times v dt)$ dann

$$\int_0^{\delta t} dt \int_{\partial S(t)} dx \cdot (v \times \vec{B}^{\text{Labor}}) = \int_{\Omega} dx \cdot \vec{B}^{\text{Labor}}, \quad (624)$$

wobei Ω die Vereinigung aller $\partial S(t)$ mit $t \in [0, \delta t]$ ist. Wir definieren nun noch Γ als Vereinigung aller $S(t)$ mit $t \in [0, \delta t]$. Dann gilt

$$0 = \int_{\Gamma} dx \operatorname{div} \vec{B}^{\text{Labor}} = \int_{\partial \Gamma} dx \vec{B}^{\text{Labor}} \quad (625)$$

$$= \int_{\Omega} dx \cdot \vec{B}^{\text{Labor}} + \Phi_{\text{mag}}(\delta t) - \Phi_{\text{mag}}(0) \quad (626)$$

mit

$$\Phi_{\text{mag}}(t) = \int_{S(t)} dx \cdot \vec{B}^{\text{Labor}} \quad (627)$$

und Normalvektor in Richtung v . Es gilt also

$$\int_{\partial S(0)} dx \cdot \vec{E}^{\text{Leiter}} = -\frac{1}{c} \frac{\Phi_{\text{mag}}(\delta t) - \Phi_{\text{mag}}(0)}{\delta t} + O(\delta t) \quad (628)$$

bzw. im Allgemeinen das **Faradaysche Induktionsgesetz**

$$\int_{\partial S(t)} dx \cdot \vec{E}^{\text{Leiter}} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}}(t). \quad (629)$$

Im Grenzwert $v \rightarrow 0$ sind beide Bezugssysteme gleich und wir finden

$$\int_{\partial S(t)} dx \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} dx \cdot \vec{B}. \quad (630)$$

Wenn wir nun noch ein konstantes $S(t) = S$ wählen gilt dank Stokes

$$0 = \int_S dx \cdot \left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (631)$$

und da dies für ein allgemeines S gelten muss ist auch

$$0 = \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (632)$$

- Wegen dem negativen Vorzeichen im Faradayschen Induktionsgesetz wirkt das erzeugte Feld der Ursache entgegen. Dies ist auch bekannt als **Lenz'sche Regel**. Beispiel: Induktionsstrom durch abnehmende magnetische Flussdichte erzeugt Magnetfeld, welches die magnetische Flussdichte vergrößert.

5.2 Maxwellscher Verschiebungsstrom und Maxwell Gleichungen

- Maxwell machte folgende Beobachtung: Mit zeitabhängiger Ladungsdichte und Stromdichte folgt aus der Ladungserhaltung die allgemeine **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (633)$$

Wenn aber weiterhin

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} j \quad (634)$$

gelten würde, folgt daraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} j = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (635)$$

was zeitabhängige Ladungsdichten verbieten würde!

Maxwell's modifiziert daher 1865 das Ampere Gesetz zu

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (j + j^{\text{verschiebung}}) \quad (636)$$

woraus folgt

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} j^{\text{verschiebung}} \quad (637)$$

und was

$$j^{\text{verschiebung}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (638)$$

nahelegt. Maxwell folgert

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (639)$$

Diese Gleichung wurde danach experimentell verifiziert.

- Die resultierenden Feldgleichungen der Elektrodynamik

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j, \quad (640)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (641)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (642)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (643)$$

werden auch **Maxwell Gleichungen** genannt.

5.3 Elektromagnetische Energie und Impuls

- Energiedichte: Betrachte eine Kraft \vec{F}_i welche von einem elektrischen Feld \vec{E} und einem magnetischen Feld \vec{B} auf eine Punktladung q_i am Ort x_i ausgeübt wird, welche sich mit Geschwindigkeit v_i bewegt:

$$\vec{F}_i(t) = q_i \left(\vec{E}(x_i(t), t) + \frac{v_i(t)}{c} \times \vec{B}(x_i(t), t) \right). \quad (644)$$

Hierdurch ändert sich die Energie der Materie mit

$$dE_{\text{mat}}(t) = \sum_i \vec{F}_i(t) \cdot dx_i(t) = \sum_i \vec{F}_i(t) \cdot \underbrace{\frac{dx_i(t)}{dt}}_{=v_i(t)} dt \quad (645)$$

$$= \sum_i q_i \left(\vec{E}(x_i(t), t) + \frac{v_i(t)}{c} \times \vec{B}(x_i(t), t) \right) \cdot v_i(t) dt \quad (646)$$

$$= \sum_i \vec{E}(x_i(t), t) \cdot (q_i v_i(t)) dt. \quad (647)$$

Daher

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} dx j(x, t) \cdot \vec{E}(x, t) \quad (648)$$

$$\stackrel{\text{Maxwell}}{=} \frac{c}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\text{rot } \vec{B}(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) \right) \cdot \vec{E}(x, t) \quad (649)$$

mit

$$j(x, t) = \sum_i \delta^{(3)}(x - x_i(t)) q_i v_i(t). \quad (650)$$

Verwende nun

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2, \quad (651)$$

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{E}_j \vec{B}_k = (\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{B} - (\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{E} \quad (652)$$

um zu zeigen, dass

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 \right) (x, t) \quad (653)$$

$$\stackrel{\text{Maxwell}}{=} \frac{c}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(-\frac{1}{c} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 \right) (x, t) \\ = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(2c \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right) (x, t) \quad (654)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\text{div } \vec{S}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} w_{\text{em}}(x, t) \right) \quad (655)$$

mit

$$w_{\text{em}}(x, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}(x, t)^2 + \vec{B}(x, t)^2), \quad (656)$$

$$\vec{S}(x, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(x, t) \times \vec{B}(x, t)). \quad (657)$$

Man nennt w_{em} die **Energiedichte** und \vec{S} die **Energiestromdichte** bzw. den **Poynting-Vektor**.

- Poynting-Theorem: Die vorangegangene Ableitung kann auch für ein beliebiges Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ vollzogen werden. Kombiniert mit Gleichung (648) folgt dann das **Poynting-Theorem**

$$\text{div } \vec{S} + \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = -j \cdot \vec{E}. \quad (658)$$

Es gilt daher für ein konstantes Volumen V

$$-\frac{dE_{\text{mat}}^V}{dt}(t) = \frac{dE_{\text{em}}^V}{dt}(t) + \int_V dx \text{div } \vec{S}(x, t) \quad (659)$$

$$= \frac{dE_{\text{em}}^V}{dt}(t) + \int_{\partial V} dx \cdot \vec{S}(x, t) \quad (660)$$

mit

$$E_{\text{em}}^V(t) \equiv \int_V dx w_{\text{em}}(x, t). \quad (661)$$

Beachte, dass bei der Parametrisierung von ∂V der Normalvektor aus V heraus zeigen muss.

Für die Gesamtenergie $E^V = E_{\text{em}}^V + E_{\text{mat}}^V$ des Systems gilt

$$\frac{d}{dt} E^V = - \int_{\partial V} dx \cdot \vec{S}(x, t). \quad (662)$$

- Betrachte nun im gleichen System den Impulsvektor \vec{P}_{mat} :

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mat}}}{dt}(t) = \sum_i \vec{F}_i(t) \quad (663)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\rho(x, t) \vec{E}(x, t) + \frac{1}{c} j(x, t) \times \vec{B}(x, t) \right) \quad (664)$$

mit

$$\rho(x, t) = \sum_i \delta^{(3)}(x - x_i(t)) q_i. \quad (665)$$

Mit den Maxwell Gleichungen folgt

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mat}}}{dt}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\text{div}(\vec{E})\vec{E} + \text{rot}(\vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) (x, t) \quad (666)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\text{div}(\vec{E})\vec{E} + \underbrace{\text{div}(\vec{B})\vec{B}}_{=0} + \text{rot}(\vec{B}) \times \vec{B} + \left(\underbrace{\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0} \right) \times \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{B} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) (x, t) \quad (667)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\text{div}(\vec{E})\vec{E} + \text{div}(\vec{B})\vec{B} + \text{rot}(\vec{B}) \times \vec{B} + \text{rot}(\vec{E}) \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \times \vec{E}) \right) (x, t). \quad (668)$$

Sie zeigen in den Übungen, dass für ein Vektorfeld $G(x, t)$ gilt

$$(\text{div}(G)G + \text{rot}(G) \times G)_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_i G_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |G|^2 \right) \quad (669)$$

und somit

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mat},i}}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}_i}{\partial t} \right) (x, t) \quad (670)$$

mit **Maxwellschem Spannungstensor**

$$T_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}_i \vec{E}_j + \vec{B}_i \vec{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right). \quad (671)$$

Die Gleichung kann auch wieder auf ein konstantes Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ eingeschränkt werden

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mat},i}^V}{dt}(t) = \int_V dx \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}(x, t) - \frac{1}{c^2} \int_V dx \frac{\partial \vec{S}_i}{\partial t}(x, t) \quad (672)$$

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial V} dx_j T_{ij}(x, t) - \frac{1}{c^2} \int_V dx \frac{\partial \vec{S}_i}{\partial t}(x, t). \quad (673)$$

Für ein abgeschlossenes System mit $(\forall x \in \partial V)(T_{ij}(x, t) = 0)$ gilt daher

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mat},i}^V}{dt}(t) = -\frac{1}{c^2} \int_V dx \frac{\partial \vec{S}_i}{\partial t}(x, t) \quad (674)$$

$$= -\frac{d\vec{P}_{\text{em},i}^V}{dt}(t) \quad (675)$$

mit **elektromagnetischer Impulsdichte**

$$\vec{g}_{\text{em}} \equiv \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (676)$$

und **elektromagnetischem Impuls**

$$\vec{P}_{\text{em}}^V(t) \equiv \int_V dx \vec{g}_{\text{em}}(x, t). \quad (677)$$

In einem abgeschlossenen System ist also der Gesamtimpuls $\vec{P}^V = \vec{P}_{\text{em}}^V + \vec{P}_{\text{mat}}^V$ erhalten, da

$$\frac{d}{dt} \vec{P}^V = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mat}}^V + \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{em}}^V = 0. \quad (678)$$

5.4 Lösung im quellfreien Raum

- Im Vakuum,

$$\rho = 0, \quad j = 0, \quad (679)$$

sind die Maxwell Gleichungen

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (680)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (681)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (682)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (683)$$

- Mit $\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \text{div grad } A = \text{grad div } A - \Delta A$ finden wir

$$-\Delta \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}, \quad (684)$$

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (685)$$

bzw. kompakt als **homogene Wellengleichung**

$$\square \vec{B} = \square \vec{E} = 0 \quad (686)$$

mit **d'Alembert Operator**

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (687)$$

Beachte: \vec{E} und \vec{B} lösen beide die Wellengleichung (686), sind aber durch die Maxwell Gleichungen gekoppelt.

- Lösung durch Separationsansatz: Für $\Psi \in \{\vec{E}_0, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{B}_0, \vec{B}_1, \vec{B}_2\}$ sei

$$\Psi(\vec{x}, t) = X_3(t) \prod_{i=0}^2 X_i(x_i) \quad (688)$$

mit

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (689)$$

und daher

$$\frac{\square\Psi}{\Psi} = \frac{X_3''}{c^2 X_3} - \sum_{i=0}^2 \frac{X_i''}{X_i} = 0 \quad (690)$$

was wegen der Separation der Variablen wieder zu individuellen Separationskonstanten

$$X_\mu'' = -k_\mu^2 X_\mu \quad (691)$$

mit $k_\mu \in \mathbb{C}$ führt. Die Konstanten müssen wegen (690) die **Dispersionsrelation**

$$\frac{\omega^2}{c^2} = |\vec{k}|^2 \quad (692)$$

für $\omega \equiv k_3$ und

$$\vec{k} \equiv \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (693)$$

erfüllen. Eine allgemeine Lösung für X_μ ist also

$$X_\mu(s) = \alpha_+^\mu e^{isk_\mu} + \alpha_-^\mu e^{-isk_\mu} \quad (694)$$

mit $\alpha_\pm^\mu \in \mathbb{C}$. Wenn nun $\text{Im } k_\mu \neq 0$, dann divergiert die Funktion für $s \rightarrow \infty$ oder $s \rightarrow -\infty$, daher schränken wir uns auf $k_\mu \in \mathbb{R}$ ein. Da der erste und zweite Term durch $k_\mu \rightarrow -k_\mu$ im Bezug stehen und wir noch Linearkombinationen betrachten, reicht es

$$X_\mu(s) = e^{isk_\mu} \quad (695)$$

anzusetzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir uns also auf die Lösung

$$\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}| \quad (696)$$

der Dispersionsrelation einschränken für Lösungsfeld

$$\Psi_{\vec{k}}^{(\pm)}(\vec{x}, t) = e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} \pm \omega(\vec{k})t)}. \quad (697)$$

Eine allgemeine reelle Linearkombination kann geschrieben werden als

$$\Psi(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\pi}^3} \tilde{\Psi}(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)} \quad (698)$$

mit $\tilde{\Psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$.

- Zusammenfassend:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\pi}^3} \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (699)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\pi}^3} \tilde{\vec{B}}(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (700)$$

$$\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|. \quad (701)$$

- Feldgleichungen: Aus

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (702)$$

folgt die **Transversalität**

$$0 = \vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = \vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}}(\vec{k}). \quad (703)$$

Aus

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (704)$$

folgt

$$\vec{k} \times \tilde{\vec{B}}(\vec{k}) = -\frac{\omega(\vec{k})}{c} \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) \quad (705)$$

und daher

$$\hat{k} \times \tilde{\vec{B}}(\vec{k}) = -\tilde{\vec{E}}(\vec{k}) \quad (706)$$

und aus

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (707)$$

folgt

$$\hat{k} \times \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = \tilde{\vec{B}}(\vec{k}). \quad (708)$$

- Eine monochromatische, ebene Welle ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{k}') = \sqrt{2\pi^3} \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \vec{E}_0 \quad (709)$$

mit $\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ und

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (710)$$

was also geschrieben werden kann als

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (711)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{Re } \hat{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (712)$$

$$\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|. \quad (713)$$

- **Polarisation** einer monochromatischen, ebenen Welle mit Wellenvektor \vec{k} : Im Allgemeinen

$$\vec{E}_0 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) e^{i\alpha} \quad (714)$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi[$, $\vec{b}_i \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$ und

$$0 = \vec{b}_1 \cdot \vec{k} = \vec{b}_2 \cdot \vec{k}. \quad (715)$$

Dann ist

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{b}_1 \cos(\alpha + \vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t) - \vec{b}_2 \sin(\alpha + \vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t). \quad (716)$$

Das Feld \vec{E} oszilliert also in der 2d orthogonalen Ebene zu \vec{k} . Das \vec{B} Feld wird in den Übungen besprochen. Wenn $\vec{b}_2 = 0$ bzw. $\vec{b}_1 = 0$ nennt man die Welle **linear polarisiert**. Wenn $|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2|$ nennt man die Welle **zirkular polarisiert**. Ansonsten ist die Welle **elliptisch polarisiert**.

- **Energietransport** einer monochromatischen, ebenen Welle mit Wellenvektor \vec{k} : Hierzu betrachten wir zunächst den Poynting-Vektor (Energiestromdichte)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (717)$$

$$= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E})) \quad (718)$$

$$= \frac{c}{4\pi} \left(\hat{k} \vec{E} \cdot \vec{E} - \underbrace{\vec{E}(\hat{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \right) \quad (719)$$

$$= \frac{c}{4\pi} (\hat{k} |\vec{E}|^2) \quad (720)$$

$$= \frac{\hat{k}c}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \quad (721)$$

$$= \hat{k} c w_{\text{em}} \quad (722)$$

mit Energiedichte w_{em} (Gleichung (656)) da, $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}$ und daher $|\vec{E}| = |\vec{B}|$.

Im quellfreien Raum gilt wegen des Poynting Theorems

$$\text{div } \vec{S} + \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = 0 \quad (723)$$

also eine Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte w_{em} und Energiestromdichte

$$\vec{S} = v w_{\text{em}} \quad (724)$$

mit konstantem Geschwindigkeitsfeld

$$v = \hat{k} c. \quad (725)$$

Die Energie wird also in Richtung des Ausbreitungsvektors \hat{k} mit Geschwindigkeit c transportiert.

5.5 Allgemeine Lösung

- In Präsenz von Quellen, gilt

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j}, \quad (726)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (727)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (728)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (729)$$

mit Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} .

- **Potentiale:** Aus $\text{div } \vec{B} = 0$ und dem Helmholtzschen Hauptsatz der Vektoranalysis folgt wieder die Existenz eines Vektorpotentials \vec{A} mit

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (730)$$

Setzen wir das nun in die homogene Gleichung ein, folgt

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (731)$$

weshalb es auch wieder ein Skalarpotential Φ mit

$$-\text{grad } \Phi = \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (732)$$

bzw.

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad (733)$$

gibt. 6 Komponenten von \vec{E} , \vec{B} sind also durch 4 Komponenten \vec{A} , Φ festgelegt. Aus $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ folgt dann

$$4\pi\rho = -\Delta\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} \quad (734)$$

und aus der verbleibenden inhomogenen Gleichung

$$\frac{4\pi}{c} j = \text{rot rot } \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \quad (735)$$

$$= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) \quad (736)$$

$$= \square \vec{A} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right). \quad (737)$$

Komponentenweise haben wir also 4 gekoppelte Differentialgleichungen für die 4 Freiheitsgrade \vec{A} , Φ .

- **Eichtransformationen:** Die \vec{E} und \vec{B} Felder

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad (738)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (739)$$

sind unter Eichtransformationen

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda, \quad (740)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Lambda \quad (741)$$

mit hinreichend differenzierbarem Skalarfeld Λ invariant, da

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Lambda = \vec{E}, \quad (742)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} + \underbrace{\text{rot grad } \Lambda}_{=0} = \vec{B}. \quad (743)$$

Mit diesem Freiheitsgrad können wir immer die **Lorenz-Eichung** (nicht Lorentz, anderer Physiker)

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0 \quad (744)$$

erreichen, welche die Differentialgleichungen der Potentiale entkoppelt. In Lorenz Eichung lösen die Potentiale also die inhomogenen Wellengleichungen

$$\frac{4\pi}{c}j = \square \vec{A}, \quad (745)$$

$$4\pi\rho = \square \Phi. \quad (746)$$

In den Übungen zeigen Sie, wie Λ einer Eichtransformation zu wählen ist um die Lorenz-Eichung zu erreichen.

- **Lösung der inhomogenen Wellengleichungen:** Da Struktur identisch, schränke Diskussion o.B.d.A. auf Φ ein. \vec{A}_i folgt dann durch $\Phi \rightarrow \vec{A}_i$ und $\rho \rightarrow j_i/c$. Wir haben im letzten Kapitel bereits die homogene Lösung besprochen, welche hier zu

$$\Phi(\vec{x}, t) = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\Phi}(\vec{k}) e^{i(\vec{x}\cdot\vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (747)$$

$$\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}| \quad (748)$$

mit Skalarfeld $\tilde{\Phi}$ führt. Die Summe dieser allgemeinen homogenen Lösung und einer (speziellen) Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt dann, wegen Linearität der Differentialgleichung, eine allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Suche hierzu wieder eine Greensche Funktion G mit

$$\square G_{x',t'}(x, t) = \delta^{(3)}(x - x')\delta(t - t') \quad (749)$$

womit dann die spezielle Lösung durch

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{x',t'}(x, t) \rho(x', t'), \\ \vec{A}(x, t) &= \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{x',t'}(x, t) j(x', t') \end{aligned} \quad (750)$$

gegeben ist. Beachte, dass hier das Integral auch über Zeiten $t' > t$ geht, weshalb wir hier im allgemeinen die Quelle zu einem späteren Zeitpunkt bereits wissen müssten. Wir zeigen nun aber, dass es möglich ist dies zu vermeiden indem wir ein G mit $(\forall t' > t)(G_{x',t'}(x, t) = 0)$ finden.

Die **retardierte Greensche Funktion**

$$G_{x',t'}^{\text{ret}}(x, t) = \frac{1}{4\pi|x - x'|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|x - x'|\right) \quad (751)$$

erfüllt diese Bedingungen. Für $t' > t$ verschwindet die Delta Distribution. Gleichung (749) zeigen Sie in den Übungen. Wenn diese Funktion in

Gleichungen (750) verwendet wird, kennzeichnen wir explizit die resultierenden **retardierten Potentiale** Φ^{ret} und \vec{A}^{ret} .

Diese Greensche Funktion erlaubt auch die physikalische Interpretation, dass die retardierten Potentiale die jeweiligen Effekte jeder Raumposition x' berücksichtigen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit zum Ort x am Zeitpunkt t bewegt haben.

5.6 Dipolstrahlung

- Betrachte eine Zeitabhängige Ladungsdichte ρ und Stromdichte j und eine Fourier-Transformation von $f \in \{\rho, j, \Phi, \vec{A}, \vec{E}, \vec{B}\}$ im Bezug auf die Zeit t ,

$$\tilde{f}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-i\omega t} f(x, t). \quad (752)$$

Diese Transformation ist invertierbar mit

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} \tilde{f}(x, \omega). \quad (753)$$

Falls $f(x, t) \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^* = f \quad (754)$$

und daher

$$\tilde{f}(x, \omega)^* = \tilde{f}(x, -\omega). \quad (755)$$

- Die Ladungsdichten $\tilde{\rho}$ und Stromdichten \tilde{j} seien in einem Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ um den Koordinatenursprung lokalisiert, d.h., $(\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus V)(\tilde{\rho}(x, \omega) = 0)$ und $(\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus V)(\tilde{j}(x, \omega) = 0)$.

Wir definieren wieder

$$R \equiv \sup \left\{ |x| \mid x \in V \right\} \in \mathbb{R}. \quad (756)$$

Die Kontinuitätsgleichung muss erfüllt sein, daher

$$\text{div } j(x, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega t} (\text{div } \tilde{j}(x, \omega) + i\omega \tilde{\rho}(x, \omega)) = 0 \quad (757)$$

bzw. da dies für alle t gelten muss

$$\text{div } \tilde{j}(x, \omega) + i\omega \tilde{\rho}(x, \omega) = 0. \quad (758)$$

Daraus folgt für die Gesamtladung

$$\tilde{q}(\omega) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dx \tilde{\rho}(x, \omega) \quad (759)$$

$$= \frac{i}{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} dx \operatorname{div} \tilde{j}(x, \omega) \quad (760)$$

$$= \frac{i}{\omega} \int_{\partial\mathbb{R}^3} dx \cdot \tilde{j}(x, \omega) \quad (761)$$

$$= 0. \quad (762)$$

Für $\omega \neq 0$ muss also die Gesamtladung $q(t, \omega)$ verschwinden.

Die retardierten Potentiale sind dann gegeben durch

$$\Phi^{\text{ret}}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{1}{|x - x'|} \rho(x', t - |x - x'|/c) \quad (763)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \tilde{\Phi}^{\text{ret}}(x, \omega), \quad (764)$$

$$\tilde{\Phi}^{\text{ret}}(x, \omega) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{e^{-ik(\omega)|x-x'|} \tilde{\rho}(x', \omega)}{|x - x'|} \quad (765)$$

mit

$$k(\omega) \equiv \frac{\omega}{c} \quad (766)$$

und

$$\tilde{A}^{\text{ret}}(x, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{1}{|x - x'|} j(x', t - |x - x'|/c) \quad (767)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \tilde{A}^{\text{ret}}(x, \omega), \quad (768)$$

$$\tilde{A}^{\text{ret}}(x, \omega) \equiv \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{e^{-ik(\omega)|x-x'|} \tilde{j}(x', \omega)}{|x - x'|} \quad (769)$$

- Drei relevante Skalen: Ausdehnung der Quelle R , Wellenlänge der Strahlung $\lambda \equiv 2\pi/k(\omega)$, Entfernung zum Beobachtungsort $r \equiv |x|$. Definiere auch die dimensionslosen Größen

$$\varepsilon \equiv \frac{R}{r}, \quad \delta \equiv \frac{R}{\lambda}, \quad \kappa \equiv \frac{r}{\lambda}, \quad (770)$$

Bespreche zuerst die **Nahzone** mit $r, R \ll \lambda$ bzw. $\kappa, \delta \ll 1$. Hier ist

$$\frac{e^{-ik(\omega)|x-x'|}}{|x - x'|} = \frac{1}{|x - x'|} (1 + O(\kappa) + O(\delta)) \quad (771)$$

und daher

$$\tilde{\Phi}^{\text{ret}}(x, \omega) \approx \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{\tilde{\rho}(x', \omega)}{|x - x'|}, \quad (772)$$

$$\tilde{A}^{\text{ret}}(x, \omega) \approx \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{\tilde{j}(x', \omega)}{|x - x'|}. \quad (773)$$

In diesem Fall gilt also nach Fourier-Transformation

$$\Phi^{\text{ret}}(x, t) \approx \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{\rho(x', t)}{|x - x'|}, \quad (774)$$

$$\vec{A}^{\text{ret}}(x, t) \approx \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \frac{j(x', t)}{|x - x'|}, \quad (775)$$

was sich also wie in der Elektro-/Magnetostatik verhält. Die **Retardierungseffekte** sind also in der Nahzone vernachlässigbar.

Bespreche dann die **Fernzone** mit $r \gg \lambda$ für kleine Quellen $\lambda \gg R$ bzw. $\varepsilon, \delta, \kappa^{-1} \ll 1$. Hier ist mit $r' \equiv |x'|$ dann

$$|x - x'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\hat{x} \cdot \hat{x}'} \quad (776)$$

$$= r \sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\hat{x} \cdot \hat{x}' + O(\varepsilon^2)} \quad (777)$$

$$= r \left(1 - \frac{r'}{r}\hat{x} \cdot \hat{x}' + O(\varepsilon^2) \right), \quad (778)$$

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'}{r}\hat{x} \cdot \hat{x}' + O(\varepsilon^2) \right) \quad (779)$$

$$e^{-ik(\omega)|x-x'|} = e^{-ik(\omega)r} e^{ik(\omega)r'\hat{x} \cdot \hat{x}'} (1 + O(\delta)O(\varepsilon)), \quad (780)$$

$$= e^{-ik(\omega)r} (1 + ik(\omega)r'\hat{x} \cdot \hat{x}') (1 + O(\delta^2) + O(\delta)O(\varepsilon)),$$

da $k(\omega)rO(\varepsilon) = O(\delta)$. Es ist also

$$\frac{e^{-ik(\omega)|x-x'|}}{|x - x'|} = \frac{e^{-ik(\omega)r}}{r} \left(1 + \left(ik(\omega) + \frac{1}{r} \right) r'\hat{x} \cdot \hat{x}' \right) \times (1 + O(\varepsilon^2) + O(\delta^2) + O(\delta)O(\varepsilon)), \quad (781)$$

$$= \frac{e^{-ik(\omega)r}}{r} (1 + ik(\omega)r'\hat{x} \cdot \hat{x}') \times (1 + O(\kappa^{-1}) + O(\varepsilon^2) + O(\delta^2) + O(\delta)O(\varepsilon)). \quad (782)$$

In der Fernzone gilt also

$$\tilde{\Phi}^{\text{ret}}(x, \omega) \approx \frac{e^{-ik(\omega)r}}{r} \int_{\mathbb{R}^3} dx' (1 + ik(\omega)r'\hat{x} \cdot \hat{x}') \tilde{\rho}(x', \omega) \quad (783)$$

$$= \frac{e^{-ik(\omega)r}}{r} (\tilde{q}(\omega) + ik(\omega)\hat{x} \cdot \tilde{p}(\omega)) \quad (784)$$

mit Dipolmoment

$$\tilde{p}(\omega) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dx' x' \tilde{\rho}(x', \omega). \quad (785)$$

Durch inverse Fourier Transformation ist also in der Fernzone

$$\Phi^{\text{ret}}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} (\tilde{q}(\omega) + ik(\omega)\hat{x} \cdot \tilde{p}(\omega)) \quad (786)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left(\tilde{q}(\omega) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \hat{x} \cdot \tilde{p}(\omega) \right) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (787)$$

$$= \frac{q(t - |x|/c)}{|x|} + \frac{\hat{x}}{c|x|} \cdot \frac{\partial p(t - |x|/c)}{\partial t}. \quad (788)$$

Vergleiche das mit Elektrostatik

$$\Phi(x) = \frac{q}{|x|} + \frac{1}{|x|} O(\varepsilon). \quad (789)$$

Die Effekte breiten sich also als Kugelwelle mit Lichtgeschwindigkeit aus ($t - |x|/c$) und ein zeitabhängiger Dipol trägt auch bereits zur führenden Ordnung bei.

Des weiteren ist in der Fernzone

$$\tilde{A}^{\text{ret}}(x, \omega) = \frac{e^{-ik(\omega)r}}{cr} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \tilde{j}(x', \omega) \quad (790)$$

$$= \frac{e^{-ik(\omega)r}}{cr} \int_{\mathbb{R}^3} dx' \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} \tilde{j}(x', \omega)_i x' - x' \text{div} \tilde{j}(x', \omega) \right) \quad (791)$$

$$= \frac{e^{-ik(\omega)r}}{cr} \left(\underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}^3} dx'_i \tilde{j}(x', \omega)_i x'}_{=0 \text{ da } \tilde{j}(\partial\mathbb{R}^3, \omega)=0} + i\omega \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} dx' x' \tilde{\rho}(x', \omega)}_{=\tilde{p}(\omega)} \right) \quad (792)$$

und daher

$$\tilde{A}^{\text{ret}}(x, t) = \frac{1}{c|x|} \frac{\partial p(t - |x|/c)}{\partial t}. \quad (793)$$

Das magnetische Feld ist dann

$$\vec{B}(x, t) = \text{rot } \vec{A}^{\text{ret}}(x, t) \quad (794)$$

$$= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \nabla_j \frac{1}{c|x|} \frac{\partial p_k(t - |x|/c)}{\partial t} \quad (795)$$

$$= -\hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{1}{c|x|^2} \frac{\hat{x}_j}{\partial t} \frac{\partial p_k(t - |x|/c)}{\partial t} + \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{1}{c|x|} \nabla_j \frac{\partial p_k(t - |x|/c)}{\partial t} \quad (796)$$

$$= -\frac{1}{c|x|^2} \hat{x} \times \frac{\partial p(t - |x|/c)}{\partial t} - \frac{\hat{x}}{c^2|x|} \times \frac{\partial^2 p(t - |x|/c)}{\partial t^2}$$

$$= -\frac{\hat{x}}{c^2|x|} \times p''(t - |x|/c) + O(\kappa^{-1}). \quad (797)$$

Das elektrische Feld ist

$$\vec{E}(x, t) = -\text{grad } \Phi^{\text{ret}}(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{\text{ret}}(x, t) \quad (798)$$

$$= \hat{x} \frac{q'(t - |x|/c)}{c|x|} + \frac{\hat{x}}{c^2|x|} \hat{x} \cdot p''(t - |x|/c) - \frac{1}{c^2|x|} p''(t - |x|/c) + O(\kappa^{-1}) \quad (799)$$

$$= \hat{x} \frac{q'(t - |x|/c)}{c|x|} + \frac{1}{c^2|x|} \hat{x} \times (\hat{x} \times p''(t - |x|/c)) + O(\kappa^{-1}) \quad (800)$$

$$= \hat{x} \frac{q'(t - |x|/c)}{c|x|} - \hat{x} \times \vec{B}(x, t) + O(\kappa^{-1}). \quad (801)$$

Wenn die Gesamtladung zeitlich konstant ist, gilt also zusammenfassend im Fernfeld

$$\vec{E}(x, t) = -\hat{x} \times \vec{B}(x, t), \quad (802)$$

$$\vec{B}(x, t) = -\frac{\hat{x}}{c^2|x|} \times p''(t - |x|/c), \quad (803)$$

$$p(t) = \int_{\mathbb{R}^3} dx x \rho(x, t). \quad (804)$$

Strahlung wird also durch die zweite Zeitableitung von ρ , d.h., beschleunigte Ladungen erzeugt und breitet sich als Kugelwelle mit Lichtgeschwindigkeit c aus.

- Die Abstrahlung eines oszillierenden Dipols behandeln Sie in den Übungen.

5.7 Elektrodynamik in Materie

- Statische Feldgleichungen in Materie:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho^{\text{frei}}, \quad (805)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (806)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (807)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j^{\text{frei}} \quad (808)$$

mit

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad (809)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (810)$$

$$\rho^{\text{pol.}} = -\nabla \cdot \vec{P}, \quad (811)$$

$$j^{\text{magn.}} = c \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (812)$$

- Zwei Veränderungen nötig um explizit Zeitabhängigkeit zu beschreiben:

1. Eine zeitliche Veränderung des Polarisationsdipols \vec{P} führt zu einem **Polarisationsstrom**, siehe auch letztes Kapitel,

$$j^{\text{pol.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (813)$$

mit

$$\frac{\partial \rho^{\text{pol.}}}{\partial t} + \operatorname{div} j^{\text{pol.}} = 0, \quad (814)$$

da

$$\operatorname{div} \left(j^{\text{pol.}} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = 0. \quad (815)$$

2. Die Beiträge des Faradayschen Induktionsgesetzes und des Maxwell'schen Verschiebungsstrom's fehlen. Erinnere an Maxwell Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j, \quad (816)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (817)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (818)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (819)$$

Ausgedrückt in \vec{E} und \vec{B} sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Materie also

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} (j^{\text{frei}} + j^{\text{magn.}} + j^{\text{pol.}}), \quad (820)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho^{\text{frei}} + \rho^{\text{pol.}}), \quad (821)$$

$$(822)$$

was wir mit Hilfsfeldern auch als

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j^{\text{frei}}, \quad (823)$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{frei}} \quad (824)$$

ausdrücken können. Die homogenen Maxwell-Gleichungen gelten in Materie unverändert:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (825)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (826)$$

- An Grenzflächen zwischen zwei verschiedenen Materialien mit Feldern $\vec{D}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ und $\vec{D}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$ folgt wieder aus den inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\hat{n}_{\perp} \cdot (\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)}) = 4\pi\sigma^{\text{frei,grenz.}}, \quad (827)$$

$$\hat{n}_{\parallel} \cdot (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \frac{4\pi}{c} (\hat{n}_{\perp} \times \hat{n}_{\parallel}) \cdot \mathbf{J}^{\text{frei,grenz.}}, \quad (828)$$

wobei \hat{n}_{\perp} senkrecht zur Grenzfläche in Richtung $\vec{D}^{(1)}$ zeigt, \hat{n}_{\parallel} ein beliebiger Vektor parallel zur Grenzfläche ist, $\sigma^{\text{frei,grenz.}}$ eine auf dem Rand induzierte Ladungsdichte ist und $\mathbf{J}^{\text{frei,grenz.}}$ eine auf dem Rand induzierte Stromdichte ist. Aus den homogenen Maxwellgleichungen folgt auch wieder

$$\hat{n}_{\parallel} \cdot (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}) = 0, \quad (829)$$

$$\hat{n}_{\perp} \cdot (\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}) = 0. \quad (830)$$

Die Herleitung ist analog zur Elektro- und Magnetostatik mit dem Satz von Gauss und Stokes. Die beiden Gleichungen der Parallelkomponenten können auch wieder äquivalent geschrieben werden als

$$\hat{n}_{\perp} \times (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}) = 0, \quad (831)$$

$$\hat{n}_{\perp} \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{\text{frei,grenz.}}. \quad (832)$$

- Auch die Herleitung der Energie im elektromagnetischen Feld ist analog zur Statik und führt zu

$$w_{\text{em}}(x, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}(x, t) \cdot \vec{D}(x, t) + \vec{B}(x, t) \cdot \vec{H}(x, t)), \quad (833)$$

$$\vec{S}(x, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(x, t) \times \vec{H}(x, t)) \quad (834)$$

und es gilt weiterhin das Poynting Theorem

$$\text{div } \vec{S} + \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = -j_{\text{frei}} \cdot \vec{E}. \quad (835)$$

- Wir beschäftigen uns wieder mit linearen, isotropen Medien. Die Suszeptibilitäten können nun aber von der Frequenz abhängen (siehe z.B. Prisma):

$$\tilde{\vec{P}}(x, \omega) = \chi_e(\omega) \tilde{\vec{E}}(x, \omega), \quad (836)$$

$$\tilde{\vec{M}}(x, \omega) = \chi_m(\omega) \tilde{\vec{H}}(x, \omega) \quad (837)$$

bzw.

$$\tilde{\vec{D}}(x, \omega) = \varepsilon(\omega) \tilde{\vec{E}}(x, \omega), \quad (838)$$

$$\tilde{\vec{B}}(x, \omega) = \mu(\omega) \tilde{\vec{H}}(x, \omega) \quad (839)$$

mit

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega), \quad (840)$$

$$\mu(\omega) = 1 + 4\pi\chi_m(\omega). \quad (841)$$

Hier ist $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) \in \mathbb{R}$, aber man kann auch Umwandlung von Strahlungsenergie in Wärmeenergie in Materie mit komplexen ε, μ modellieren, siehe weiterführende Vorlesungen.

Beispiele im optischen Frequenzbereich ($\lambda \approx 500 \text{ nm}$):

- Luft: $\varepsilon \approx 1, \mu \approx 1$
- Glas: $\varepsilon \approx 1.5 - 2, \mu \approx 1$
- Wasser: $\varepsilon \approx 1.7, \mu \approx 1$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen gelten weiter unverändert, die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in linearen, isotropen Medien lauten daher für die Fourier Komponenten

$$\text{rot } \tilde{\vec{B}}(x, \omega) - \frac{i\omega\mu(\omega)\varepsilon(\omega)}{c} \tilde{\vec{E}}(x, \omega) = \frac{4\pi\mu(\omega)}{c} \tilde{j}^{\text{frei}}(x, \omega), \quad (842)$$

$$\text{div } \tilde{\vec{E}}(x, \omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \tilde{\rho}^{\text{frei}}(x, \omega). \quad (843)$$

- Aus diesen Gleichungen folgen wieder Wellengleichungen. Für monochromatische, ebene Wellen ist weiterhin

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (844)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{Re } \hat{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega(\vec{k})t)}, \quad (845)$$

für Wellenvektor \vec{k} eine Lösung, die Dispersionsgleichung ist jedoch nun

$$\omega(\vec{k}) = \frac{c}{n(\omega)} |\vec{k}| \quad (846)$$

mit Brechungsindex

$$n(\omega) \equiv \sqrt{\varepsilon(\omega(\vec{k})) \mu(\omega(\vec{k}))}. \quad (847)$$

Aus dem Vergleich zu $\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$ im Vakuum, sieht man, dass sich im Medium die Wellen mit Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \quad (848)$$

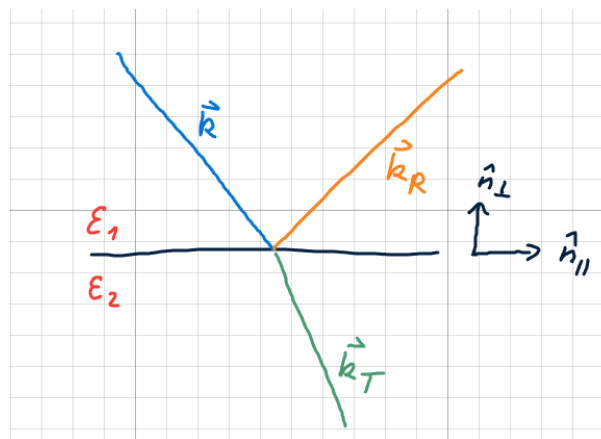
ausbreiten.

In den Übungen besprechen Sie ein Wellenpaket mit verschiedenen Frequenzkomponenten und die resultierende **Gruppengeschwindigkeit**.

- **Reflexion und Brechung** an Grenzfläche zweier optischer Medien:

Betrachte Verhalten einer einfallenden ebener, monochromatischer Welle mit Wellenvektor \vec{k} an Grenzflächen ohne Ladung ($\sigma^{\text{frei, grenz.}} = 0$, $J^{\text{frei, grenz.}} = 0$) mit $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega) \in \mathbb{R}$ und $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Daher Brechungsindex: $n_1(\omega) = \sqrt{\varepsilon_1(\omega)}$ und $n_2(\omega) = \sqrt{\varepsilon_2(\omega)}$.



Wir definieren nun die einlaufende (E), transmittierte (T) und reflektierte (R) Wellen durch

$$\vec{E}^{(X)}(\vec{x}, t) = \text{Re } \vec{E}_0^{(X)} e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k}^{(X)} - \omega^{(X)} t)}, \quad (849)$$

$$\vec{B}^{(X)}(\vec{x}, t) = \text{Re } \hat{k}^{(X)} \times \vec{E}_0^{(X)} e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k}^{(X)} - \omega^{(X)} t)}, \quad (850)$$

mit $X \in \{E, T, R\}$. Es gilt die Dispersionsbeziehung

$$\omega^{(E)} = \frac{c|k^{(E)}|}{n_1}, \quad (851)$$

$$\omega^{(R)} = \frac{c|k^{(R)}|}{n_1}, \quad (852)$$

$$\omega^{(T)} = \frac{c|k^{(T)}|}{n_2}. \quad (853)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir nun noch

$$\vec{k}^{(E)} = k^{(E)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\cos \phi^{(E)} \end{pmatrix} \quad (854)$$

ansetzen,

$$\hat{n}_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (855)$$

wählen und die Grenzfläche bei $\vec{x}_2 = 0$ setzen. Da $\mu_1 = \mu_2 = 1$, ist an der Grenzfläche

$$\hat{n}_\perp \cdot (\varepsilon_1(\vec{E}^{(E)} + \vec{E}^{(R)}) - \varepsilon_2\vec{E}^{(T)}) = 0, \quad (856)$$

$$\hat{n}_\parallel \cdot (\vec{E}^{(E)} + \vec{E}^{(R)} - \vec{E}^{(T)}) = 0, \quad (857)$$

$$\vec{B}^{(E)} + \vec{B}^{(R)} - \vec{B}^{(T)} = 0. \quad (858)$$

Betrachte nun einen allgemeinen Punkt an der Grenzfläche

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (859)$$

so dass

$$0 = \text{Re } \hat{n}_\perp \cdot (\varepsilon_1 \vec{E}_0^{(E)} e^{i\vec{k}^{(E)} \cdot x - i\omega^{(E)} t} + \varepsilon_1 \vec{E}_0^{(R)} e^{i\vec{k}^{(R)} \cdot x - i\omega^{(R)} t} - \varepsilon_2 \vec{E}_0^{(T)} e^{i\vec{k}^{(T)} \cdot x - i\omega^{(T)} t}), \quad (860)$$

$$0 = \text{Re } \hat{n}_\parallel \cdot (\vec{E}_0^{(E)} e^{i\vec{k}^{(E)} \cdot x - i\omega^{(E)} t} + \vec{E}_0^{(R)} e^{i\vec{k}^{(R)} \cdot x - i\omega^{(R)} t} - \vec{E}_0^{(T)} e^{i\vec{k}^{(T)} \cdot x - i\omega^{(T)} t}), \quad (861)$$

was nur dann für alle t , x_0 und x_1 gelten kann, wenn

$$\omega \equiv \omega^{(E)} = \omega^{(R)} = \omega^{(T)}, \quad (862)$$

$$k^{(E)} \sin \phi^{(E)} = \vec{k}_0^{(E)} = \vec{k}_0^{(R)} = \vec{k}_0^{(T)}, \quad (863)$$

$$0 = \vec{k}_1^{(E)} = \vec{k}_1^{(R)} = \vec{k}_1^{(T)}, \quad (864)$$

$$0 = \hat{n}_\perp \cdot (\varepsilon_1 \vec{E}_0^{(E)} + \varepsilon_1 \vec{E}_0^{(R)} - \varepsilon_2 \vec{E}_0^{(T)}), \quad (865)$$

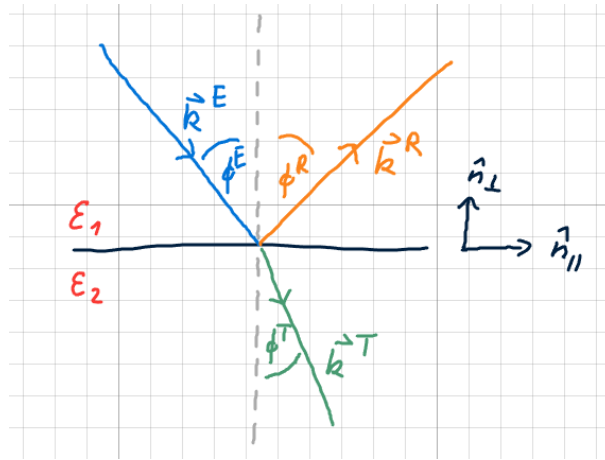
$$0 = \hat{n}_\parallel \cdot (\vec{E}_0^{(E)} + \vec{E}_0^{(R)} - \vec{E}_0^{(T)}). \quad (866)$$

Auch die reflektierten und transmittierten Wellenvektoren können also nur in der xy -Ebene liegen, weshalb wir im Allgemeinen

$$\vec{k}^{(R)} = k^{(R)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(R)} \\ 0 \\ \cos \phi^{(R)} \end{pmatrix}, \quad (867)$$

$$\vec{k}^{(T)} = k^{(T)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(T)} \\ 0 \\ -\cos \phi^{(T)} \end{pmatrix} \quad (868)$$

schreiben können mit $\phi^{(X)} \in [0, \pi/2]$.



Aus den Dispersionsgleichungen folgt

$$\frac{k^{(E)}}{n_1} = \frac{k^{(R)}}{n_1} = \frac{k^{(T)}}{n_2} \quad (869)$$

und aus (863)

$$k^{(E)} \sin \phi^{(E)} = k^{(R)} \sin \phi^{(R)} = k^{(T)} \sin \phi^{(T)}. \quad (870)$$

Daraus folgt

$$\sin \phi^{(E)} = \sin \phi^{(R)} \quad (871)$$

und mit der Einschränkung der Winkel das **Reflexionsgesetz**

$$\phi^{(E)} = \phi^{(R)}. \quad (872)$$

Für die transmittierte Welle folgt aus dem Bruch von (870) und (869)

$$n_1 \sin \phi^{(E)} = n_2 \sin \phi^{(T)} \quad (873)$$

bzw. das **Brechungsgesetz**

$$\frac{\sin \phi^{(E)}}{\sin \phi^{(T)}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (874)$$

Falls $n_1 > n_2$ tritt ab Einfallswinkel

$$\phi_{\text{total}}^{(E)} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (875)$$

keine transmittierte Welle auf (**Totalreflexion**). Wir können die Wellenvektoren noch durch die Einfallenden ausdrücken

$$\vec{k}^{(R)} = k^{(E)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(E)} \\ 0 \\ \frac{k^{(R)}}{k^{(E)}} \sqrt{1 - \sin^2 \phi^{(R)}} \end{pmatrix} = k^{(E)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(E)} \\ 0 \\ \cos \phi^{(E)} \end{pmatrix}, \quad (876)$$

$$\vec{k}^{(T)} = k^{(E)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\frac{k^{(T)}}{k^{(E)}} \sqrt{1 - \sin^2 \phi^{(T)}} \end{pmatrix} = k^{(E)} \begin{pmatrix} \sin \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\sqrt{n_2^2/n_1^2 - \sin^2 \phi^{(E)}} \end{pmatrix}. \quad (877)$$

Für die Amplituden wissen wir noch, dass $\vec{k}^{(X)} \cdot \vec{E}^{(X)} = 0$ und daher können wir alle Felder aufteilen in

$$\vec{E}^{(X)} = \vec{E}_{\perp}^{(X)} + \vec{E}_{\parallel}^{(X)} \quad (878)$$

mit $\vec{E}_{\perp}^{(X)}$ senkrecht zur Einfallsebene (also in y Richtung) und $\vec{E}_{\parallel}^{(X)}$ in Einfallsebene (xz Ebene).

Für die senkrechte Komponente gilt o.B.d.A.

$$(\vec{E}_0^{(X)})_{\perp} = E_{\perp}^{(X)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (879)$$

und aus der Stetigkeit von \vec{E} an der Grenze

$$E_{\perp}^{(E)} + E_{\perp}^{(R)} = E_{\perp}^{(T)}. \quad (880)$$

Die \vec{B} Feld Stetigkeitsbedingung ist

$$0 = \hat{k}^{(E)} \times \vec{E}_0^{(E)} + \hat{k}^{(R)} \times \vec{E}_0^{(R)} - \hat{k}^{(T)} \times \vec{E}_0^{(T)} \quad (881)$$

woraus folgt

$$\cos \phi^{(E)} (E_{\perp}^{(R)} - E_{\perp}^{(E)}) + \sqrt{n_2^2/n_1^2 - \sin^2 \phi^{(E)}} E_{\perp}^{(T)} = 0. \quad (882)$$

Aus (880) und (882) folgen nun die **Fresnelschen Formeln**

$$\frac{E_{\perp}^{(R)}}{E_{\perp}^{(E)}} = \frac{\cos \phi^{(E)} - \sqrt{n_2^2/n_1^2 - \sin^2 \phi^{(E)}}}{\cos \phi^{(E)} + \sqrt{n_2^2/n_1^2 - \sin^2 \phi^{(E)}}}, \quad (883)$$

$$\frac{E_{\perp}^{(T)}}{E_{\perp}^{(E)}} = \frac{2 \cos \phi^{(E)}}{\cos \phi^{(E)} + \sqrt{n_2^2/n_1^2 - \sin^2 \phi^{(E)}}}. \quad (884)$$

Für die parallele Komponente gilt

$$(\vec{E}_0^{(E)})_{\parallel} = E_{\parallel}^{(E)} \begin{pmatrix} -\cos \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\sin \phi^{(E)} \end{pmatrix}, \quad (885)$$

$$(\vec{E}_0^{(R)})_{\parallel} = E_{\parallel}^{(R)} \begin{pmatrix} \cos \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\sin \phi^{(E)} \end{pmatrix}, \quad (886)$$

$$(\vec{E}_0^{(T)})_{\parallel} = E_{\parallel}^{(T)} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 \sin^2 \phi^{(E)}} \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_2} \sin \phi^{(E)} \end{pmatrix}, \quad (887)$$

$$(888)$$

so dass weiterhin $\hat{k}^{(X)} \cdot \vec{E}^{(X)} = 0$. Nach analoger Rechnung (Übungen) folgen dann auch hierzu **Fresnelsche Formeln**

$$\frac{E_{\parallel}^{(R)}}{E_{\parallel}^{(E)}} = \frac{n_2^2 \cos \phi^{(E)} - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \phi^{(E)}}}{n_2^2 \cos \phi^{(E)} + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \phi^{(E)}}}, \quad (889)$$

$$\frac{E_{\parallel}^{(T)}}{E_{\parallel}^{(E)}} = \frac{2n_1 n_2 \cos \phi^{(E)}}{n_2^2 \cos \phi^{(E)} + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \phi^{(E)}}}. \quad (890)$$

Die entsprechenden Gleichungen für die \vec{B} Felder ergeben sich jeweils aus

$$\vec{B}^{(X)} = \hat{k}^{(X)} \times \vec{E}^{(X)}. \quad (891)$$

- Phasensprung an der Reflektierten Welle: Falls $n_1 < n_2$ folgt aus Fresnel-scher Formel

$$\frac{E_{\perp}^{(R)}}{E_{\perp}^{(E)}} < 0 \quad (892)$$

bzw. das reflektierte \vec{E} Feld hat einen **Phasensprung** von Winkel π . Falls $n_1 > n_2$ und $\phi^{(E)} < \phi_{\text{total}}^{(E)}$ ist

$$\frac{E_{\perp}^{(R)}}{E_{\perp}^{(E)}} > 0 \quad (893)$$

bzw. kein Phasensprung des reflektierten Feldes. Falls $n_1 > n_2$ und $\phi^{(E)} > \phi_{\text{total}}^{(E)}$ wird das Amplitudenverhältnis komplex

$$\frac{E_{\perp}^{(R)}}{E_{\perp}^{(E)}} = e^{i\delta_{\perp}} \quad (894)$$

und es tritt wieder ein Phasensprung δ_{\perp} auf.

Für die parallele Komponenten vergleichen wir

$$(\vec{E}_0^{(E)})_{\parallel} = E_{\parallel}^{(E)} \begin{pmatrix} -\cos \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\sin \phi^{(E)} \end{pmatrix}, \quad (895)$$

$$(\vec{E}_0^{(R)})_{\parallel} = E_{\parallel}^{(R)} \begin{pmatrix} \cos \phi^{(E)} \\ 0 \\ -\sin \phi^{(E)} \end{pmatrix} \quad (896)$$

und sehen:

- Falls $(E_{\parallel}^{(R)}/E_{\parallel}^{(E)}) > 0$ Phasensprung mit π der x-Komponente, kein Phasensprung der y-Komponente
- Falls $(E_{\parallel}^{(R)}/E_{\parallel}^{(E)}) < 0$ Phasensprung mit π der y-Komponente, kein Phasensprung der x-Komponente

Es gilt hier mit

$$\phi_{\text{brewster}}^{(E)} \equiv \arctan \frac{n_2}{n_1}, \quad (897)$$

dass

$$\begin{aligned} &(((n_1 < n_2) \wedge (\phi^{(E)} < \phi_{\text{brewster}}^{(E)})) \vee \\ &((n_1 > n_2) \wedge (\phi_{\text{brewster}}^{(E)} < \phi^{(E)} < \phi_{\text{total}}^{(E)}))) \Rightarrow ((E_{\parallel}^{(R)}/E_{\parallel}^{(E)}) > 0) \end{aligned} \quad (898)$$

und

$$\begin{aligned} &(((n_1 < n_2) \wedge (\phi^{(E)} > \phi_{\text{brewster}}^{(E)})) \vee \\ &((n_1 > n_2) \wedge (\phi^{(E)} < \phi_{\text{brewster}}^{(E)}))) \Rightarrow ((E_{\parallel}^{(R)}/E_{\parallel}^{(E)}) < 0). \end{aligned} \quad (899)$$

Bei Totalreflexion ($\phi^{(E)} > \phi_{\text{total}}^{(E)}$) ist wieder eine komplexe Phase

$$\frac{E_{\perp}^{(R)}}{E_{\perp}^{(E)}} = e^{i\delta_{\parallel}} \quad (900)$$

zu beachten. Bei $\phi^{(E)} = \phi_{\text{brewster}}^{(E)}$ ist die reflektierte Welle linear polarisiert und senkrecht zur Einfallsebene (siehe Übungen).

Die entsprechenden Gleichungen für die \vec{B} Felder ergeben sich jeweils aus

$$\vec{B}^{(X)} = \hat{k}^{(X)} \times \vec{E}^{(X)}. \quad (901)$$

Beachte: durch das Kreuzprodukt haben andere Komponenten des \vec{B} Feldes als des \vec{E} Feldes einen Phasensprung.

- Reflexions und Transmissionskoeffizient in Übung

6 Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Galilei und Lorentztransformationen

- **Inertialsystem:** System in dem sich ein kräftefreier Körper gleichförmig und geradlinig bewegt
- **Galilei Transformation:**
 - Sei IS und IS' zwei Inertialsysteme
 - Koordinatenursprung von IS' bewegt sich in IS mit Geschwindigkeit v_r
 - Bei $t = 0$ seien die beiden Koordinatenursprünge am gleichen Ort
 - In IS' bewegt sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit v :

$$x'(t) = x'_0 + tv \quad (902)$$

- Dann sagt die nichtrelativistische Galilei Transformation, dass die Zeit t in IS und IS' die gleiche Bedeutung hat und

$$x(t) = x'_0 + t(v + v_r). \quad (903)$$

Es gilt also

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_r. \quad (904)$$

- Maxwell Gleichungen sagen aber Lichtwellen mit Geschwindigkeit c in jedem Inertialsystem voraus. Daher können Galilei Transformationen nicht uneingeschränkt gelten, insbesondere nicht für Licht.
- **Lorentz Transformation:** Lineare Transformation, welche

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (905)$$

mit $dx \in \mathbb{R}^3$ und $dx^2 = dx \cdot dx$ invariant unter Wechsel von IS nach IS' lässt. Sei dann

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (906)$$

so ist also $ds^2 = 0 = ds'^2$ und daher auch

$$\frac{dx'}{dt'} = c. \quad (907)$$

Hier hat jedes Inertialsystem eine eigene Zeit. Der Wechsel von IS zu IS' im obigen Beispiel mit Relativgeschwindigkeit v_r nennt man hier **Lorentz**

Boost oder **spezielle Lorentztransformation**. Diese werden beschrieben durch eine lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00}(v_r) & \Lambda_{01}(v_r) \\ \Lambda_{10}(v_r) & \Lambda_{11}(v_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (908)$$

Wir schränken uns hier auf eine Raumdimension ein. Dann gilt für den Lorentz Boost

$$x' = 0, \quad x = v_r t \quad (909)$$

bzw.

$$0 = (\Lambda_{10}(v_r)c + \Lambda_{11}(v_r)v_r)t \quad (910)$$

und daher noch

$$\Lambda_{10}(v_r) = -\Lambda_{11}(v_r)\beta \quad (911)$$

mit

$$\beta \equiv \frac{v_r}{c}. \quad (912)$$

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erfordert ausserdem

$$x' = ct', \quad x = ct \quad (913)$$

und daher

$$ct' = (\Lambda_{00}(v_r) + \Lambda_{01}(v_r))ct = (\Lambda_{10}(v_r) + \Lambda_{11}(v_r))ct \quad (914)$$

und für

$$x' = -ct', \quad x = -ct \quad (915)$$

folgt

$$ct' = (\Lambda_{00}(v_r) - \Lambda_{01}(v_r))ct = -(\Lambda_{10}(v_r) - \Lambda_{11}(v_r))ct. \quad (916)$$

Daher ist

$$\Lambda_{00}(v_r) + \Lambda_{01}(v_r) = \Lambda_{10}(v_r) + \Lambda_{11}(v_r), \quad (917)$$

$$\Lambda_{00}(v_r) - \Lambda_{01}(v_r) = -\Lambda_{10}(v_r) + \Lambda_{11}(v_r) \quad (918)$$

bzw.

$$\Lambda_{00}(v_r) = \Lambda_{11}(v_r), \quad \Lambda_{01}(v_r) = \Lambda_{10}(v_r). \quad (919)$$

Zusammengefasst

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda_{11}(v_r) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (920)$$

Unter $x \rightarrow -x$, $x' \rightarrow -x'$, $v_r \rightarrow -v_r$ folgt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ -x' \end{pmatrix} = \Lambda_{11}(-v_r) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \end{pmatrix} \quad (921)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda_{11}(-v_r) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (922)$$

und daher $\Lambda_{11}(-v_r) = \Lambda_{11}(v_r)$. Da diese Gleichung auch den Boost von IS' zu IS beschreibt, muss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda_{11}(v_r) \Lambda_{11}(-v_r) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (923)$$

$$= \Lambda_{11}(v_r)^2 (1 - \beta^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (924)$$

Bei positiver t Zeitentwicklung fordern wir noch positive t' Zeitentwicklung, weshalb wir die positive Lösung

$$\Lambda_{11}(v_r) = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (925)$$

wählen. Zusammenfassend

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (926)$$

- Für $ds^2 = 0$ nennt man den Abstand **lichtartig**, für $ds^2 > 0$ **zeitartig** und für $ds^2 < 0$ **raumartig**. Raumartige Ereignisse können nicht kausal verbunden sein, da Signale mit $v > c$ reisen müssten.

6.2 Kovariante Formulierung und Lorentzgruppe

- Definiere nun den **Minkowski** Vektorraum $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \langle \cdot \rangle)$ mit nicht-standard Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i \quad (927)$$

für $x, y \in \mathcal{M}$ und

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}. \quad (928)$$

- Der entsprechende Dualraum \mathcal{M}^* ist wieder durch alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, wobei jedem $x \in \mathcal{M}$ ein

$$x^\dagger = \langle x, \cdot \rangle = (x^0 \quad -x^1 \quad -x^2 \quad -x^3) \quad (929)$$

mit $x^\dagger \in \mathcal{M}^*$ zugeordnet ist.

- Verwende nun Tensornotation und unterscheide zwischen **kontravarianten** Indizes (oben geschrieben, Koordinaten in Vektorraum) und **kovarianten** Indizes (unten geschrieben, Koordinaten in Dualvektorraum).
- Konvention: Griechische Indizes aus $\{0, 1, 2, 3\}$, lateinische Indizes aus $\{1, 2, 3\}$
- Beispiel: Vierervektor

$$(x^\alpha) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (930)$$

mit $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ und $x^3 = z$.

- Beispiel: Dreiervektor

$$(x^i) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (931)$$

- Definiere nun noch den **metrischen Tensor** bzw. **Minkowski Tensor**

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (932)$$

Dieser definiere nun wie kontravariante Indizes mit kovarianten Indizes in Beziehung stehen. Mit Summenkonvention gilt

$$t_{\dots\mu\dots} = g_{\mu\nu} t^{\nu\dots\dots}. \quad (933)$$

Beispiel mit (x^α) von oben:

$$(x_\alpha) = (g_{\alpha\beta} x^\beta) = (ct \quad -x \quad -y \quad -z). \quad (934)$$

Es gibt auch eine Umkehroperation mit

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (935)$$

so dass

$$t^{\dots\mu\dots} = g^{\mu\nu} t^{\dots\nu\dots} = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} t^{\dots\rho\dots}, \quad (936)$$

da

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} \equiv g^{\mu}_{\rho} \quad (937)$$

mit

$$(g^{\mu}_{\rho}) \equiv (\delta^{\mu}_{\rho}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (938)$$

- Die Anzahl der Indizes nennt man auch **Stufe** des Tensors, wobei man auch explizit die kontravariante Stufe r und kovariante Stufe s separat definieren kann und Tensor vom Typ (r, s) schreibt. Notation:

- Typ $(0,0)$: Skalar
- Typ $(1,0)$: Vektor
- Typ $(0,1)$: Dualvektor
- Typ $(1,1)$: Matrix

Es gibt aber auch Tensoren höherer Stufe, welche man nicht einfach in Matrix-Vektor Schreibweise ausdrücken kann!

- Durch Kombination von Vektoren und Dualvektoren kann nun wieder ein **Skalarprodukt** definiert werden. Beispiel: Sei

$$(ds^{\mu}) = \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix} \quad (939)$$

mit Dreiervektor dx , dann ist

$$ds^2 = ds_{\mu} ds^{\mu} = g_{\mu\nu} ds^{\nu} ds^{\mu} = c^2 dt^2 - dx^2. \quad (940)$$

- Lorentztransformationen lassen nun dieses Skalarprodukt invariant, ähnlich wie orthogonale Transformationen das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n invariant lassen. Solche Transformationen bilden wieder eine Gruppe (**Lorentzgruppe**). Diese beinhaltet Boosts, Zeitumkehr, orthogonale Transformationen im \mathbb{R}^3 . Wenn man noch affine Transformationen hinzunimmt (Translationen), bekommt man die **Poincarégruppe**. Wenn die Zeit nicht umgekehrt wird, nennt man die Transformation **orthochron**.
- Schreibe eine Lorentztransformation Λ als Matrix

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (941)$$

mit $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu)$, dann folgt aus der Invariant des Skalarproduktes zweier Vektoren x, y , dass

$$y'{}^\mu x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\beta x^\nu y_\beta \stackrel{!}{=} y_\mu x^\mu, \quad (942)$$

dass

$$\delta^\beta{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\beta = g^{\beta\rho} \Lambda^\alpha{}_\rho g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (943)$$

In Matrixform gilt also

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Lambda. \quad (944)$$

Daraus folgt

$$(\det \Lambda)^2 = 1. \quad (945)$$

Wenn $\det \Lambda = 1$, nennen wir die Transformation **eigentlich**.

Beispiel Boost:

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (946)$$

und daher

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (947)$$

$$= \gamma^2 (1 - \beta^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (948)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (949)$$

- **Transformationsverhalten:** Ein beliebiger Tensor transformiere sich unter Λ für jeden Index entweder als kovarianter oder kontravarianter Vektor. Beispiel:

$$t^{\mu\nu}{}_\rho \rightarrow t'^{\mu\nu}{}_\rho = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda_\rho{}^\gamma t^{\alpha\beta}{}_\gamma. \quad (950)$$

- **Forminvarianz:** Transformationsverhalten durch offene Indizes gegeben: Dies erlaubt einfach Lorentzinvariante/kovariante Objekte zu definieren. Beispiel:

$$M^\nu{}_\rho \equiv t^{\mu\nu}{}_\rho m_\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\mu{}^\delta t^{\alpha\beta}{}_\gamma m_\delta \quad (951)$$

$$= g^\delta{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda_\rho{}^\gamma t^{\alpha\beta}{}_\gamma m_\delta \quad (952)$$

$$= \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda_\rho{}^\gamma t^{\alpha\beta}{}_\gamma m_\alpha \quad (953)$$

$$= \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda_\rho{}^\gamma M^\beta{}_\gamma. \quad (954)$$

- **Ableitungsoperatoren:** Der Ableitungsoperator transformiert sich kovariant

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (955)$$

da

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \quad (956)$$

und mit (942) ist daher

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (957)$$

Der d'Alembert Operator ist dann einfach

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \quad (958)$$

und daher ein Skalar unter Lorentztransformationen.

- **Levi-Civita Tensor:** Total antisymmetrischer Tensor $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ mit $\varepsilon^{0123} = 1$ transformiert sich als sogenannter Pseudotensor, siehe Appendix C, mit

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \rightarrow \varepsilon^{\alpha'\beta'\mu'\nu'} = \det(\Lambda) \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} \Lambda^\beta{}_{\beta'} \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \varepsilon^{\alpha'\beta'\mu'\nu'}. \quad (959)$$

Beachte: $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$

6.3 Kovarianz der Maxwell Gleichungen

- Formuliere nun die Elektrodynamik in Sprache von Tensoren mit wohldefiniertem Verhalten unter Lorentztransformationen Λ
- Fasse zunächst Ladungsdichte ρ und Stromdichte j zur **Viererstromdichte**

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ j \end{pmatrix} \quad (960)$$

zusammen. Die Kontinuitätsgleichung ist dann einfach

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (961)$$

Da diese in jedem Inertialsystem gilt, folgt unter Λ

$$j^\mu(x) \rightarrow j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x). \quad (962)$$

Wir definieren das Ruhesystem der Ladungsverteilung durch $j^i = 0$ und in diesem System die Gesamtladung als

$$q(t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0(t, x^i) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \delta(ct - x^0) j^0(x^\mu). \quad (963)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung gilt

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} q(t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} j^0(t, \vec{x}) \quad (964)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \frac{\partial}{\partial x^i} j^i(t, \vec{x}) = 0. \quad (965)$$

Die Gesamtladung in IS' ist

$$q'(t') = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' \delta(ct' - x'^0) j'^0(x'^\mu) \quad (966)$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x |\det(\Lambda)| \delta(ct' - \Lambda^0_0 x^0 - \Lambda^0_i x^i) \Lambda^0_0 j^0(x^\nu) \quad (967)$$

$$= \text{Sign}(\Lambda^0_0) \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0(t'/\Lambda^0_0 - c^{-1} \Lambda^0_i x^i / \Lambda^0_0, x^i). \quad (968)$$

Für orthochrone Lorentztransformationen und zeitlich konstante Ladungen $\frac{\partial}{\partial t} q(t) = 0$ folgt dann $q' = q$, bzw. die Lorentz-Invarianz der Gesamtladung.

- Die Potentialgleichungen in Lorenz Eichung sind

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad (969)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (970)$$

mit

$$(A^\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (971)$$

Daher transformiert sich das **Viererpotential** A^α wie j^α und daher als Vektor unter Λ .

- Mit dem **Feldstärketensor**

$$F^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (972)$$

finden wir

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (973)$$

da

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (974)$$

Beachte hierbei, dass $\partial_0 = \partial^0$ aber $\partial_i = -\partial^i$. Unter Λ transformiert F sich als Tensor (induziert durch ∂^α und A^α)

$$F^{\alpha\beta} \rightarrow F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu}. \quad (975)$$

Unter Eichtransformationen

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f, \quad (976)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f \quad (977)$$

transformiert sich also

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f \quad (978)$$

und daher

$$F^{\alpha\beta} \rightarrow F'^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \quad (979)$$

für zweimal stetig differenzierbares f (Satz von Schwarz). Der Feldstärketensor ist also **eichinvariant**.

- Die **Maxwellgleichungen** können dann auch einfach eichinvariant und lorentzkovariant als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (980)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (981)$$

geschrieben werden mit **dualem Feldstärketensor**

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (982)$$

bzw.

$$(\tilde{F}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (983)$$

- Das **retardierte Potential**

$$\begin{aligned} A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|\right) j^\alpha(\vec{x}', t') \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j^\alpha\left(\vec{x}', t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|\right) \end{aligned} \quad (984)$$

können wir dann mit

$$\Theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (985)$$

und

$$x \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad y \equiv \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} \quad (986)$$

auch explizit kovariant als

$$\begin{aligned} A_{\text{ret}}^\alpha(x) &= \frac{2}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \delta((x-y)^\beta(x-y)_\beta) \Theta(x^0-y^0) j^\alpha(y) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \delta((ct-ct')^2 - |\vec{x}-\vec{x}'|^2) \Theta(ct-ct') j^\alpha(\vec{x}', t') \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta(t'-t + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|) j^\alpha(\vec{x}', t') \end{aligned} \quad (987)$$

schreiben. Hierbei löst man

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(f(z)) g(z) \quad (988)$$

durch Substitution mit $u = f(z)$. Man kann zeigen, dass auch das **avancierte Potential**

$$A_{\text{av}}^\alpha(x) = \frac{2}{c} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \delta((x-y)^\beta(x-y)_\beta) \Theta(y^0-x^0) j^\alpha(y) \quad (989)$$

eine Lösung ist, was allerdings Kenntnis des Stroms in der Zukunft voraussetzt. In dieser Form ist es nun einfach zu zeigen, dass die retardierten und avancierten Potentiale sich als Vektor unter Λ transformieren.

6.4 Transformation von elektrischen und magnetischen Feldern

- Unter Λ transformiert sich

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (990)$$

Daraus können wir nun die Transformation von \vec{E} und \vec{B} ablesen. Für einen Boost in x Richtung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (991)$$

folgt daher

$$(F'^{\alpha\beta}) = \Lambda \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Lambda^T \quad (992)$$

und daraus

$$E'_x = E_x, \quad (993)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), \quad (994)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y), \quad (995)$$

$$B'_x = B_x, \quad (996)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \quad (997)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \quad (998)$$

Analog für Boost in allgemeine Richtung $\vec{\beta}$:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad (999)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{E}), \quad (1000)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad (1001)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \quad (1002)$$

mit

$$\vec{X}'_{\parallel} = \hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{X}), \quad (1003)$$

$$\vec{X}'_{\perp} = \vec{X} - \vec{X}'_{\parallel}. \quad (1004)$$

Zusammengefasst gilt also:

$$\vec{E}' = (1 - \gamma)\hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{E}) + \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}), \quad (1005)$$

$$\vec{B}' = (1 - \gamma)\hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{B}) + \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}). \quad (1006)$$

Es gilt:

- Feldkomponenten parallel zu Boost Richtung bleiben unverändert
- Feldkomponenten senkrecht zu Boost Richtung werden mit γ gestreckt und mischen sich zwischen \vec{E} und \vec{B} .

Beispiel: Punktladung mit Ruhesystem IS' ,

$$\vec{B}'(\vec{x}', t') = 0, \quad (1007)$$

$$\vec{E}'(\vec{x}', t') = \frac{q\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3} \quad (1008)$$

mit allgemeinem Boost $\vec{\beta}$

$$t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{x}), \quad (1009)$$

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}t), \quad (1010)$$

$$\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}. \quad (1011)$$

Dann ist in IS

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (1 - \gamma)\hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{E}') + \gamma(\vec{E}' - \vec{\beta} \times \vec{B}') \quad (1012)$$

$$= (1 - \gamma)\hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{E}') + \gamma\vec{E}' \quad (1013)$$

$$= \frac{q}{|\vec{x}'|^3} \left((1 - \gamma)\hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{x}') + \gamma\vec{x}' \right) \quad (1014)$$

$$= \frac{q}{|\vec{x}'|^3} \left((1 - \gamma)\vec{x}'_{\parallel} + \gamma\vec{x}' \right) \quad (1015)$$

$$= \frac{q}{|\vec{x}'|^3} \left(\vec{x}'_{\parallel} + \gamma\vec{x}'_{\perp} \right) \quad (1016)$$

$$= \frac{\gamma q}{|\vec{x}'|^3} \left(\vec{x} - \vec{\beta}t \right). \quad (1017)$$

Wir vereinfachen dann mit

$$\vec{x}'_{\perp}^2 \equiv \sin^2(\phi)(\vec{x} - \vec{\beta}t)^2, \quad (1018)$$

$$(\vec{x}'_{\parallel} - \vec{\beta}t)^2 \equiv \cos^2(\phi)(\vec{x} - \vec{\beta}t)^2 \quad (1019)$$

den Ausdruck

$$|\vec{x}'|^2 = \vec{x}'_{\perp}^2 + \gamma^2(\vec{x}'_{\parallel} - \vec{\beta}t)^2 \quad (1020)$$

$$= (\sin^2(\phi) + \gamma^2(1 - \sin^2(\phi))) (\vec{x} - \vec{\beta}t)^2 \quad (1021)$$

$$= \gamma^2 \left((1 - \vec{\beta}^2) \sin^2(\phi) + 1 - \sin^2(\phi) \right) (\vec{x} - \vec{\beta}t)^2 \quad (1022)$$

$$= \gamma^2 \left(1 - \vec{\beta}^2 \sin^2(\phi) \right) (\vec{x} - \vec{\beta}t)^2 \quad (1023)$$

$$(1024)$$

und schliesslich

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = q \frac{\vec{x} - \vec{\beta}t}{|\vec{x} - \vec{\beta}t|^3} \frac{1 - \vec{\beta}^2}{\left(1 - \vec{\beta}^2 \sin^2(\phi) \right)^{3/2}}. \quad (1025)$$

6.5 Elektromagnetische Wellen, Doppler Effekt, Aberration

- Im quellfreien Raum ($j^{\mu} = 0$) kann eine monochromatische Lösung von

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\alpha} = 0 \quad (1026)$$

o.B.d.A. als

$$A^{\alpha}(x^{\mu}) = \text{Re } A_0^{\alpha} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \quad (1027)$$

mit $A_0^{\alpha} \in \mathbb{C}$ angesetzt werden, wobei die Dispersionsrelation

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0 \quad (1028)$$

gelten muss, da

$$\partial_\nu \partial^\nu e^{ik_\mu x^\mu} = -k_\nu k^\nu e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (1029)$$

Aus dem Transformationsverhalten von $F^{\mu\nu}$ folgt, dass sich k^μ und A_0^α als Vektor unter Λ transformieren muss. Wir setzen o.B.d.A. an

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (1030)$$

mit $|\vec{k}| = \omega/c$ bzgl. unserer bisherigen Notation. Die Lorenz Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1031)$$

fordert dann

$$k_\mu A_0^\mu = 0 \quad (1032)$$

was wir o.B.d.A. als

$$(A_0^\mu) = \begin{pmatrix} \hat{k} \cdot \vec{A}_0 \\ \vec{A}_0 \end{pmatrix} \quad (1033)$$

mit $\vec{A}_0 \in \mathbb{C}^3$ schreiben können.

- Unter Lorenz Boost

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1034)$$

folgt

$$\omega' = \gamma (\omega - c\beta \vec{k}_x), \quad (1035)$$

$$\vec{k}'_x = \gamma \left(-\beta \frac{\omega}{c} + \vec{k}_x \right), \quad (1036)$$

$$\vec{k}'_y = \vec{k}_y, \quad (1037)$$

$$\vec{k}'_z = \vec{k}_z. \quad (1038)$$

Die beobachtete Frequenzen in IS und IS' sind also unterschiedlich (**Dopplereffekt**) und die Ausbreitungsrichtung der Welle verändert sich (**Aber-ration**). Es gilt

$$\omega' = \omega - c\beta \vec{k}_x + O(\beta^2), \quad (1039)$$

so dass für kleine Geschwindigkeiten und $\vec{k}'_y = \vec{k}'_z = 0$ und $\vec{k}_x = \omega/c$ gilt

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 - \beta + O(\beta^2) \quad (1040)$$

was für kleine $|\beta|$ dem klassischen Doppler Effekt entspricht.

6.6 Lagrange Formalismus und Noether Theorem

- Wir konstruieren uns nun im Lagrange Formalismus eine relativistische Feldtheorie basiert auf den Symmetrien der Elektrodynamik.
- Wir definieren zunächst eine **Lagrangedichte** \mathcal{L} durch

$$S(A^\mu, j^\nu) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}(A^\mu(x), j^\nu(x)) \quad (1041)$$

mit **Wirkung** S . Wir fordern, dass die Wirkung invariant sei unter Lorentztransformationen und Eichtransformationen.

- Ein erster möglicher Term ist dann

$$S_0 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x A_\mu(x) j^\mu(x) \quad (1042)$$

was trivialerweise ein Lorentz Skalar ist (erinnere $d^4x' = d^4x$, da $|\det(\Lambda)| = 1$) und unter Eichtransformationen

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu f \quad (1043)$$

sich zu

$$S'_0 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (A_\mu(x) - (\partial_\mu f(x))) j^\mu(x) \quad (1044)$$

$$= S_0 - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \partial_\mu (f(x) j^\mu(x)) + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f(x) \underbrace{(\partial_\mu j^\mu(x))}_{=0} \quad (1045)$$

$$= S_0 - [f(x) j^\mu(x)]_{\partial\mathbb{R}^4} = S_0 \quad (1046)$$

für verschwindende Randbeiträge transformiert.

- Ein weiterer möglicher Term ist

$$S_1 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (1047)$$

was beide Symmetrieeigenschaften erfüllt, siehe Diskussion zu F .

- Ein anderer möglicher Term ist

$$S_2 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \tilde{F}_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (1048)$$

was allerdings unter uneigentlichen Lorentztransformationen (wegen dem Levi-Civita Tensor) sich nicht als Skalar transformiert.

- Der Term

$$S_3 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \tilde{F}_{\mu\nu}(x) \tilde{F}^{\mu\nu}(x) \quad (1049)$$

wiederum hat das richtige Transformationsverhalten, ist aber proportional zu S_1 , da

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2(g^\mu{}_\gamma g^\nu{}_\delta - g^\mu{}_\delta g^\nu{}_\gamma). \quad (1050)$$

- Der Term

$$S_4 = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x A_\mu(x) A^\mu(x) \quad (1051)$$

ist nicht eichinvariant.

- Zu niedrigster Potenz in A^μ , j^μ und ∂_μ , sind dies alle möglichen Terme. Um zu verstehen, wie sich Terme verschiedener Potenz verhalten, bietet es sich an noch das Skalierungsverhalten unter

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad (1052)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ zu untersuchen. Wir finden nach kurzer Rechnung

$$\partial_\mu \rightarrow \lambda^{-1} \partial_\mu, \quad (1053)$$

$$d^4x \rightarrow \lambda^4 d^4x, \quad (1054)$$

$$j^\mu \rightarrow \lambda^{-3} j^\mu, \quad (1055)$$

$$A^\mu \rightarrow \lambda^{-1} A^\mu, \quad (1056)$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \lambda^{-2} F^{\mu\nu}. \quad (1057)$$

Wenn sich ein Term unter Skalierung mit λ^d transformiert, nennt man d auch die **Dimension des Terms**. Wir untersuchen nun die Dimensionen der bisher erlaubten Terme in der Wirkung:

$$S_0 \rightarrow \lambda^0 S_0, \quad (1058)$$

$$S_1 \rightarrow \lambda^0 S_1 \quad (1059)$$

Das ist das gewünschte Verhalten, damit die Bewegungsgleichungen nicht von der Wahl der Maßeinheiten (Meter, Millimeter, etc.) abhängen.

Terme mit höheren Potenzen von A^μ , ∂_μ und j^μ brauchen dann dimensionsbehaftete Parameter, was eine neue physikalische Skala einführt. Beispiel:

$$S_{1b} = (1\text{m})^4 \int d^4x (F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x))^2 \quad (1060)$$

ist wieder dimensionslos, da ein Meter unter Skalierung $\text{m} \rightarrow \lambda\text{m}$. Dies führt jedoch zu unterschiedlicher Physik unter und über der Skala 1m, was bis jetzt experimentell ausgeschlossen ist, aber in der Quantenfeldtheorie interessante Anwendungen hat.

- Das relative Gewicht der verbleibenden S_0 und S_1 legt die Konvention der Felder A^μ und j^μ fest. Eine Wahl, konsistent mit der bisherigen Vorlesung, ist

$$\begin{aligned}
S &= - \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{c} j_\mu(x) A^\mu(x) \right] & (1061) \\
&= - \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) + \frac{1}{c} j_\mu(x) A^\mu(x) \right] \\
&= - \int d^4x \left[\frac{1}{8\pi} [(\partial_\mu A_\nu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x)) - (\partial_\mu A_\nu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x))] + \frac{1}{c} j_\mu(x) A^\mu(x) \right].
\end{aligned}$$

- Aus dem Prinzip der extremalen Wirkung folgen die Bewegungsgleichungen (Herleitung Appendix A)

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu(x)} \quad (1062)$$

$$= \frac{1}{c} j^\nu(x) - \frac{1}{4\pi} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \quad (1063)$$

$$= \frac{1}{c} j^\nu(x) - \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x). \quad (1064)$$

Das ist äquivalent zu den inhomogenen Maxwell Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \quad (1065)$$

Die homogenen Maxwell Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (1066)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \quad (1067)$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta \stackrel{\mu \leftrightarrow \alpha}{=} -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = 0 \quad (1068)$$

folgen direkt aus der Antisymmetrie von \tilde{F} .

- Relativistische Kopplung an ein Punktteilchen mit Koordinate x^μ : Betrachte zunächst den lorentzkovarianten Geschwindigkeitsvektor

$$u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu \equiv \dot{x}^\mu, \quad (1069)$$

wobei τ der **Eigenzeit** (Zeit im Ruhesystem) entspricht. Dieser transformiert sich unter Λ zu

$$u^\mu \rightarrow u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (1070)$$

da die Eigenzeit invariant unter Λ ist.

Wir fügen zur Stromdichte j^μ nun eine Probeladung q bei x^μ hinzu mit $j^\mu \rightarrow j^\mu + j^\mu_{\text{punkt}}$ und

$$j^\mu_{\text{punkt}}(y) = q \int_{\mathbb{R}} d\tau \delta^{(4)}(x - y) u^\mu(x) \quad (1071)$$

was sich explizit als Lorentzvektor transformiert. In der Wirkung entspricht dies dem Term

$$S_5 = -\frac{q}{c} \int_{\mathbb{R}} d\tau u^\mu(x) A_\mu(x). \quad (1072)$$

- Die auf ein relativistisches Punktteilchen wirkende Kraft \vec{F} folgt aus der Definition des **kanonischen Impulses**

$$p^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = -\frac{q}{c} A^\mu(x) \quad (1073)$$

mit Lagrangefunktion L

$$S = \int_{\mathbb{R}} d\tau L \quad (1074)$$

und der Viererkraft

$$F^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = -\frac{q}{c} \frac{d}{d\tau} A^\mu(x) - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \quad (1075)$$

$$= -\frac{q}{c} \frac{dx_\nu}{d\tau} \partial^\nu A^\mu(x) - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = -\frac{q}{c} u_\nu \partial^\nu A^\mu(x) - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \quad (1076)$$

$$= -\frac{q}{c} u_\nu \partial^\nu A^\mu(x) + \frac{q}{c} u_\nu \partial^\mu A^\nu(x) \quad (1077)$$

$$= \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1078)$$

Für die örtliche Komponenten gilt

$$F^i = q(F^{i0} + \frac{u_j}{c} F^{ij}) = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{B})_i, \quad (1079)$$

was die erwartete Lorentzkraft ist. Die zeitliche Komponente gibt die **Leistung**

$$F^0 = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{u}. \quad (1080)$$

- **Noether Theorem:** In Appendix B zeigen wir, dass für eine Transformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \varepsilon \delta A_\mu, \quad (1081)$$

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon \delta x^\mu \quad (1082)$$

welche die Lagrangedichte invariant lässt, gilt, dass der Strom

$$j_{\text{noether}}^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta A_\nu(x) + \delta x^\mu \mathcal{L}(x) \quad (1083)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j_{\text{noether}}^\mu = 0 \quad (1084)$$

erfüllt und

$$Q_{\text{noether}} = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} j_{\text{noether}}^0(\vec{x}, t) \quad (1085)$$

erhalten bzw. zeitunabhängig ist. Wir betrachten nun zuerst die Invarianz unter **Translationen**

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x + \varepsilon y) = A_\mu(x) + \varepsilon y^\alpha \partial_\alpha A_\mu(x) + O(\varepsilon^2), \quad (1086)$$

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \varepsilon y^\mu \quad (1087)$$

bzw.

$$\delta A_\mu(x) = y^\alpha \partial_\alpha A_\mu(x), \quad \delta x^\mu = -y^\mu. \quad (1088)$$

Daher ist

$$j_{\text{noether}}^\mu(x) = y^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \partial_\alpha A_\nu(x) - g^\mu{}_\alpha \mathcal{L}(x) \right] \quad (1089)$$

$$\equiv y_\alpha T^{\mu\alpha} \quad (1090)$$

mit **Energie-Impuls Tensor**

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha(x))} \partial^\nu A_\alpha(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (1091)$$

Da die Kontinuitätsgleichung für beliebige y gelten muss, gilt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1092)$$

Für unsere Wirkung ohne Quellterm ($j = 0$) ist das

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha}(x) \partial^\nu A_\alpha(x) + g^{\mu\nu} \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x). \quad (1093)$$

Dieser Term ist nicht explizit eichinvariant, aber wir können einen Term

$$T_{\text{symm}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (A^\nu F^{\mu\alpha}) \stackrel{j=0}{=} -\frac{1}{4\pi} (\partial_\alpha A^\nu) F^{\mu\alpha} \quad (1094)$$

hinzufügen, da

$$\partial_\mu T_{\text{symm}}^{\mu\nu} = 0 \quad (1095)$$

wegen der Antisymmetrie von F . Der gesamte Energie-Impuls Tensor

$$T_{\text{gesamt}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\alpha}(x) F^\nu{}_\alpha(x) - \frac{g^{\mu\nu}}{4} F^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x) \right] \quad (1096)$$

erfüllt also weiterhin $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ und lässt sich schreiben als

$$(T_{\text{gesamt}}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w_{\text{em}} & \frac{1}{c} S_x & \frac{1}{c} S_y & \frac{1}{c} S_z \\ \frac{1}{c} S_x & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ \frac{1}{c} S_y & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ \frac{1}{c} S_z & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix} \quad (1097)$$

mit Energiedichte w_{em} und Poynting Vektor \vec{S} , definiert in Gleichung (656), und Maxwellscher Spannungstensor T_{ij} definiert in Gleichung (671), und wiederholt hier:

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (1098)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (1099)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}_i \vec{E}_j + \vec{B}_i \vec{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right). \quad (1100)$$

Die Einträge bei $\mu = 0$ definieren die Erhaltungsgrößen Energie ($\nu = 0$) und Impuls ($\nu = 1, 2, 3$) des elektromagnetischen Feldes. Für $\nu = 0$ ist die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu T_{\text{gesamt}}^{\mu 0} = 0 \quad (1101)$$

identische mit dem Poynting Theorem. Für $\nu = 1, 2, 3$ liefert die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu T_{\text{gesamt}}^{\mu i} = 0 \quad (1102)$$

den Zusammenhang (670) zwischen zeitlicher Veränderung der Impulsdichte und dem Maxwellschen Spannungstensor. **Alle diese Gleichungen entsprechen also nur dem Noether Theorem zur Translationsinvarianz.**

Wir untersuchen nun wieder für nichtverschwindende Quellen ($j \neq 0$) die **Eichsymmetrie** unter

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (1103)$$

bzw.

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu f(x), \quad \delta x^\mu = 0. \quad (1104)$$

Dann ist der zugeordnete Noether Strom

$$j_{\text{noether}}^{\mu} \equiv -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} f = -\frac{1}{4\pi} \partial_{\alpha} (F^{\mu\alpha} f) + \frac{1}{4\pi} (\partial_{\alpha} F^{\mu\alpha}) f \quad (1105)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \partial_{\alpha} (F^{\mu\alpha} f) - \frac{1}{c} j^{\mu} f. \quad (1106)$$

Für den ersten Term gilt wegen der Antisymmetrie von F trivialerweise

$$\partial_{\mu} \partial_{\alpha} (F^{\mu\alpha} f) = 0, \quad (1107)$$

so dass aus der Annahme der Eichsymmetrie die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \quad (1108)$$

folgt.

A Bewegungsgleichung Felder

Wir betrachten eine Wirkung

$$S(A_\mu) = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)) \quad (1109)$$

unter einer Variation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \varepsilon \delta A_\mu \quad (1110)$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und Vektorfelder A_μ und δA_μ . Wir finden dann

$$\delta S(A_\mu) \equiv S(A_\mu + \varepsilon \delta A_\mu) - S(A_\mu) \quad (1111)$$

$$= \varepsilon \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} \delta A_\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \partial_\mu \delta A_\nu(x) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (1112)$$

$$\stackrel{P.I.}{=} \varepsilon \int d^4x \delta A_\mu(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (1113)$$

Die Wirkung wird genau dann für ein beliebiges δA_μ extremal, falls

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))} = 0. \quad (1114)$$

Analog für zweifach differenzierbares $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\delta f(x, y) = f(x + \varepsilon \delta x, y + \varepsilon \delta y) - f(x, y) = \varepsilon \left[\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right] + O(\varepsilon^2) \quad (1115)$$

genau dann extremal für beliebiges $\delta x, \delta y$, wenn $\text{grad } f = 0$.

B Noether Theorem für Feldtheorien

Wir betrachten nun direkt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x), x^\mu) \quad (1116)$$

unter einer Variation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \varepsilon \delta A_\mu, \quad (1117)$$

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon \delta x^\mu \quad (1118)$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und Vektorfelder $A_\mu, \delta A_\mu$. Wir finden dann

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} \delta A_\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \partial_\mu \delta A_\nu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x) \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \delta A_\mu(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))} \right) \\ &\quad + \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta A_\nu(x) + \delta x^\mu \mathcal{L}(x) \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1119)$$

Das erste Integral verschwindet dann wegen den Bewegungsgleichungen und es bleibt

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon\partial_\mu j_{\text{noether}}^\mu(x) + O(\varepsilon^2) \quad (1120)$$

mit

$$j_{\text{noether}}^\mu(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta A_\nu(x) + \delta x^\mu \mathcal{L}(x). \quad (1121)$$

Wenn die Variation einer Symmetrie der Lagrangedichte entspricht, dann ist $\delta\mathcal{L} = 0$ und daher

$$\partial_\mu j_{\text{noether}}^\mu(x) = 0. \quad (1122)$$

Es gilt daher

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} j_{\text{noether}}^0(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \frac{\partial}{\partial \vec{x}^i} j_{\text{noether}}^i(\vec{x}, t) \quad (1123)$$

$$= 0 \quad (1124)$$

und daher ist die Noether-Ladung

$$Q_{\text{noether}} = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} j_{\text{noether}}^0(\vec{x}, t) \quad (1125)$$

erhalten bzw. zeitunabhängig.

C Transformation Levi-Civita Tensor

Zunächst gilt für eine 4x4 Matrix

$$M = (M^\mu{}_\nu) \quad (1126)$$

mit Zeilenindex μ und Spaltenindex ν , dass

$$\det(M) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M^0{}_\mu M^1{}_\nu M^2{}_\alpha M^3{}_\beta \quad (1127)$$

aus der Definition der Determinante und des Levi-Civita Tensors. Wir können jedoch auch die Spalten der Matrix beliebig ordnen, was wegen der Antisymmetrie von ε zu

$$\varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \det(M) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M^{\mu'}{}_\mu M^{\nu'}{}_\nu M^{\alpha'}{}_\alpha M^{\beta'}{}_\beta \quad (1128)$$

führt. Wenn wir nun $M = \Lambda$ einer Lorentztransformation setzen und $\det(\Lambda)^2 = 1$ verwenden, folgt

$$\varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = \det(\Lambda) \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu \Lambda^{\alpha'}{}_\alpha \Lambda^{\beta'}{}_\beta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (1129)$$

Der Levi-Civita Tensor selbst ändert sich unter Λ nicht, aber da Gleichung (1128) gilt, kann man äquivalent behaupten, dass er sich bis auf den Faktor $\det(\Lambda)$ als Lorentztensor transformiert. Im Allgemeinen sagt man ε transformiert sich als Pseudotensor, was den Faktor $\det(\Lambda)$ mit einschliesst.

Die Konsequenz dieses Transformationsverhaltens ist, dass

$$P \equiv \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1130)$$

mit Lorentztensor T sich als Pseudoskalar zu

$$P \rightarrow P' = \det(\Lambda)P \quad (1131)$$

transformiert.