Universität Regensburg
Fakultät Mathematik

Die Stufe von Algebren über formal reellen Körpern

Bachelorarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades „Bachelor of Science (B.Sc.)“ im Studiengang Mathematik an der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg gemäß §21 Bachelorprüfungsordnung vom 01.06.2015

Eingereicht bei Prof. Dr. Moritz Kerz
am 01. September 2021

Eingereicht von:

Lukas Krinner
Taiding 7a
94363 Oberschneiding
Matrikelnummer: 2089452

Abstract

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Thema, ob in einem Ring R die -1 als Summe von Quadraten geschrieben werden kann.
Falls dies der Fall ist, beschreibt die Stufe die minimale Anzahl an Quadratsummanden, die dazu benötigt werden. Ist -1 keine Quadratsumme in R, so ist die Stufe als ∞ definiert. Körper mit der Stufe ∞ nennen wir *formal reell.*
In der Arbeit wird bewiesen, dass die Stufe von Körpern immer Zweierpotenzen sind und konkrete Körper konstruiert, die die Stufe 2^n für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ annehmen.
Den Großteil widmen wir allerdings der R-Algebra

$$A_{n,R} = R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Hierbei ist R ein kommutativer Ring mit 1 und n eine natürliche Zahl.
Das Hauptergebnis lässt sich wie folgt zusammenfassen:

> Sei R ein Ring mit Stufe ∞. Dann ist die Stufe von $A_{n,R}$ gegeben durch n.

Zunächst wird der Spezialfall $R = \mathbb{R}$ behandelt. Dazu werden einige topologische Hilfsmittel verwendet und unter anderem der Satz von Borsuk-Ulam bewiesen.
Im zweiten Spezialfall wird vorausgesetzt, dass R ein formal reeller Körper ist. Um den Beweis zu führen, werden Zusammenhänge zwischen formal reellen Körpern und geordneten Körpern erläutert. Für den allgemeinen Fall wird schließlich ein Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow K$$

konstruiert, wobei K ein formal reeller Körper ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein wichtiger Körper in der Mathematik ist der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Der entscheidende Vorteil gegenüber dem Körper $\mathbb{R}$ ist die Tatsache, dass $X^2 = -1$ eine Lösung $i \in \mathbb{C}$ besitzt. In dem Unterring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ von $\mathbb{C}$ gibt es keine Lösung der oben genannten Gleichung. Allerdings kann -1 als Summe mehrerer Quadrate dargestellt werden, denn $-1 = \sqrt{-5}^2 + 2^2$.
In dieser Arbeit wird das Problem untersucht, ob und wie die -1 in einem Ring als Summe mehrerer Quadrate geschrieben werden kann.
Besonderes Interesse zeigen wir für die R-Algebra

$$A_{n,R} := R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

wobei R ein kommutativer Ring mit 1 ist. Obwohl die Gleichung

$$[-1] = [x_1]^2 + \ldots + [x_n]^2 \text{ in } A_{n,R}$$

offensichtlich ist, ist es aufwändiger zu belegen, wie viele Summanden *mindestens* benötigt werden, um -1 in dieser Algebra als Summe von Quadraten darzustellen. Diese Frage werden wir für alle Ringe R klären, in denen die -1 keine Quadratsumme ist.
Auf dem Weg dahin behandeln wir quadratische Formen, untersuchen Körper und konstruieren Algebren mit konkreten Eigenschaften. Um den Spezialfall $A_{n,\mathbb{R}}$ zu durchleuchten, beweisen wir topologische Hilfsmittel und den Satz von Borsuk-Ulam. Den Fall $A_{n,K}$, wobei K ein Körper ist, in dem die -1 durch keine Quadratsumme dargestellt wird, erläutern wir durch die Theorie von geordneten Körpern. Schlussendlich helfen Mittel aus der Algebra, um den allgemeinen Fall abzuleiten. Wir verwenden folgende Konventionen:

Konventionen und Notationen

Alle Ringe seien kommutativ mit 1.
Ist R ein Ring, so beschreibe, falls nichts anderes gesagt, $R[x_1, \ldots, x_n]$ den Polynomring in n Variablen. Für einen Körper K notieren wir $K(x_1, \ldots, x_n)$ für den Quotientenkörper von $K[x_1, \ldots, x_n]$.
Befinden wir uns in einem Quotienten einer Menge M, so bezeichnet $[x]$ die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in M$. Für weitere Symbole und Schreibweisen sei auf den Anhang A verwiesen.

1. Grundlagen

Im Folgenden sei K ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Definition 1.1 (quadratische Form) Eine (n-stufige) quadratische Form, bzw. eine quadratische Form der Stufe n, ist ein Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \backslash \{0\}$ mit

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \text{ für } a_{ij} \in K.$$

Die quadratische Form f stellt ein Element $a \in K$ dar, falls es $x \in K^n \backslash \{0\}$ gibt, sodass $f(x) = a$ gilt.

Beispiel 1.2 Für uns wird hauptsächlich die quadratische Form

$$\varphi = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

von Interesse sein. Diese kann geschrieben werden als $\varphi = x^T x$, wobei

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K[x_1, \ldots, x_n]^n$$

definiert wird und x^T das Transponierte von x ist. Eine Anwendung ist folgendes Lemma:

Lemma 1.3 Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Falls die quadratische Form $\varphi = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ die 0 darstellt, so stellt φ bereits jedes Element aus K dar.

Beweis. Ist $n = 1$, so kann die 0 nicht dargestellt werden. Wir nehmen $n \geq 2$ an. Sei $v \in K^n \backslash \{0\}$, sodass $\varphi(v) = 0$ gilt. Da $v \neq 0$ vorausgesetzt wurde, finden wir ein $u \in K^n$ mit $v^T u = 1$. Definiere $\lambda = -\frac{\varphi(u)}{2}$ und $\hat{v} := u + \lambda v$. Es gilt

$$\varphi(\hat{v}) = \hat{v}^T \hat{v} = u^T u + 2\lambda \underbrace{u^T v}_{=1} + \lambda^2 \cdot \underbrace{v^T v}_{=\varphi(v)=0} = \varphi(u) - \varphi(u) = 0.$$

Ähnlich kann die Gleichung $v^T \hat{v} = 1$ abgeleitet werden.
Für beliebige $a, b \in K$ schließen wir

$$\varphi(a \cdot v + b \cdot \hat{v}) = a^2 \cdot v^T v + b^2 \cdot \hat{v}^T \hat{v} + 2ab \cdot v^T \hat{v} = 2ab.$$

Wird $b = \frac{1}{2}$ gewählt, so kann jedes $a \in K$ durch φ dargestellt werden. □

Im Rest dieses Kapitels orientieren wir uns an [4].

Definition 1.4 Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$G_n(K) := \{x \in K \mid x \neq 0 \text{ und } x \text{ ist eine Summe von } n \text{ Quadraten}\}.$$

Proposition 1.5 Ist $G_n(K)$ eine Gruppe bzgl. Multiplikation, so ist

$$G_n(K) G_{n+1}(K) = G_{2n}(K).$$

Beweis. Seien $u_1, \ldots, u_{2n}, v_1, \ldots, v_{n+1} \in K$.

- „$\subset$ “: Eine Rechnung ergibt

  $$(u_1^2+\ldots+u_n^2)(v_1^2+\ldots+v_{n+1}^2) = (u_1^2+\ldots+u_n^2)(v_1^2+\ldots+v_n^2)+(u_1^2+\ldots+u_n^2)v_{n+1}^2.$$

  Mit der geforderten Gruppeneigenschaft, lässt sich begründen, dass sowohl der linke als auch der rechte Summand in $G_n(K)$ liegen.

- „$\supset$ “: Ohne Beschränkung kann $(u_1^2 + \ldots + u_n^2) \neq 0$ angenommen werden. In diesem Fall gilt $u_1^2 + \ldots + u_{2n}^2 = (u_1^2 + \ldots + u_n^2)\left(1 + \frac{(u_1^2+\ldots+u_n^2)(u_{n+1}^2+\ldots+u_{2n}^2)}{(u_1^2+\ldots+u_n^2)^2}\right)$. Der rechte Faktor ist aufgrund der Gruppeneigenschaft von $G_n(K)$ ein Element von $G_{n+1}(K)$. □

Bemerkung 1.6 Die Menge $G_n(K)$ ist stabil unter Bildung von Inversen, denn ist $a = a_1^2 + \ldots + a_n^2 \in G_n(K)$, so gilt

$$a^{-1} = \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)^2} \in G_n(K).$$

Die Menge $G_n(K)$ ist also eine Gruppe bzgl. Multiplikation genau dann, wenn $G_n(K)$ multiplikativ abgeschlossen ist.

Zwei bekannte Aussagen über quadratische Formen führen uns zum zentralen Theorem dieses Kapitels.

Satz 1.7 Sei $d \in K$. Das Polynom $x^2 + d$ ist eine Summe von n Quadraten in $K(x)$ genau dann, wenn d oder -1 eine Summe von $n-1$ Quadraten in K ist.

Beweis. Dies ist [5, S.10 Thm. 3.2] für $a_1 = \ldots = a_n = 1$. Ein elementarer Beweis findet sich unter [1]. □

Satz 1.8 Wenn -1 nicht als Summe von $n-1$ Quadraten in K dargestellt wird, dann ist $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ keine Summe von $n-1$ Quadraten in $K(x_1, \ldots, x_n)$

Beweis. Wir wenden induktiv über n den Satz 1.7 an.
Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar.
Sei $n > 1$. Falls $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ eine Summe von $n-1$ Quadraten in $K(x_1, \ldots, x_n)$ ist, so muss nach Satz 1.7 $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$ eine Summe von $n-2$ Quadraten in $K(x_1, .., x_{n-1})$ sein, da die -1 nicht als Summe von $n-1$ Quadraten geschrieben werden kann. Das stellt einen Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung dar. □

Albrecht Pfister beweist in [4] anschließendes Theorem. Wir orientieren uns an seinem Beweis [4, Satz 2].

Theorem 1.9 (Multiplikativität der Pfisterformen) Sei $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und K ein beliebiger Körper[1]. Dann ist $G_n(K)$ eine Gruppe. Das heißt für alle $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in K$ gibt es $w_1, \ldots, w_n \in K$, sodass

$$(u_1^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + \ldots + v_n^2) = w_1^2 + \ldots + w_n^2.$$

Insbesondere kann $w_1 = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ gewählt werden.

Beweis. Wir beweisen das Theorem per Induktion über k:
Für $k = 0$ ist die Aussage klar: $u_1^2v_1^2 = (u_1v_1)^2$
Für $k = 1$ gilt durch Nachrechnen

$$(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) = (u_1v_1 + u_2v_2)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2. \tag{1}$$

Sei angenommen das Theorem gelte für ein $k \geq 1$ und alle Körper. Es soll nun für $k + 1$ bewiesen werden. Sei $\tilde{K}$ ein beliebiger Körper mit

$$u_1, \ldots, u_{2n}, v_1, \ldots, v_{2n} \in \tilde{K} \quad \text{für} \quad n := 2^k.$$

Wenn $\tilde{K}$ Charakteristik 2 hat, dann gilt $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ für alle $x, y \in \tilde{K}$. Somit sind alle Summen von Quadraten bereits Quadrate und die Aussage ist trivial.
Ohne Beschränkung gelte $\mathrm{char}(\tilde{K}) \neq 2$. Wir werden zwei Fälle unterscheiden:

- Die -1 ist Summe von $2n-1$ Quadraten in $\tilde{K}$. Dann wählen wir $e_2, \ldots, e_{2n} \in \tilde{K}$ mit

  $$1 + e_2^2 + \ldots + e_{2n}^2 = 0.$$

  Multiplizieren mit $(e_2^2 + 1)$ ergibt

  $$\begin{aligned} 0 &= (e_2^2 + 1)(1 + e_2^2 + \ldots + e_{2n}^2) \\ &= (e_2^2 + 1)^2 + (e_2^2 + 1)(e_3^2 + e_4^2) + \ldots + (e_2^2 + 1)(e_{2n-1}^2 + e_{2n}^2). \end{aligned}$$

  Die hinteren $n - 1$ Summanden lassen sich nach Gleichung 1 jeweils als Summe zweier Quadrate schreiben. Folglich kann 0 als nichttriviale[2] Summe von $2n - 1$ Quadraten geschrieben werden. Das heißt, die quadratische Form $\varphi = x_1^2 + \ldots + x_{2n-1}^2$ stellt die 0 nichttrivial dar. Mit Lemma 1.3 folgt, dass es ein $\alpha \in \tilde{K}^{2n-1}$ gibt mit

  $$\varphi(\alpha) = (u_1^2 + \ldots + u_{2n}^2)(v_1^2 + \ldots + v_{2n}^2) - (u_1v_1 + \ldots + u_{2n}v_{2n})^2.$$

  Die Aussage folgt sofort.

[1] $\mathrm{char}(K) = 2$ ist in diesem Theorem nicht ausgeschlossen.
[2] $e_2^2 + 1 = 0$ oder obige Quadratsumme mit $2n - 1$ Summanden ist nichttrivial.

- Kommen wir zum Fall, dass -1 nicht als Summe von $2n-1$ Quadraten in $\tilde{K}$ geschrieben werden kann. Ohne Beschränkung sei $u_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ angenommen[3]. Durch die Induktionsvoraussetzung kann gefordert werden, dass $G_n(\tilde{K})$ eine Gruppe ist. Durch Proposition 1.5 erhalten wir daher die Existenz von Elementen $\hat{u}_0^2, \ldots, \hat{u}_n^2, \hat{v}_0^2, \ldots, \hat{v}_n^2 \in \tilde{K}$ mit:

$$\begin{aligned} u_1^2 + \ldots + u_{2n}^2 &= (u_1^2 + \ldots + u_n^2)(\hat{u}_0^2 + \ldots + \hat{u}_n^2), \\ v_1^2 + \ldots + v_{2n}^2 &= (v_1^2 + \ldots + v_n^2)(\hat{v}_0^2 + \ldots + \hat{v}_n^2). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(u_1^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + \ldots + v_n^2)$ eine n-fache Quadratsumme in $\tilde{K}$.
Mit dem gleichen Argument ist $(\hat{u}_1^2 + \ldots + \hat{u}_n^2)(\hat{v}_1^2 + \ldots + \hat{v}_n^2)$ eine Summe von n Quadraten $\hat{w}_1^2, \ldots, \hat{w}_n^2$ mit $\hat{w}_1 = \hat{u}_1\hat{v}_1 + \ldots + \hat{u}_n\hat{v}_n$. Die beiden elementaren Nebenrechnungen

$$\begin{aligned} &(\hat{u}_0\hat{v}_0 + \ldots + \hat{u}_n\hat{v}_n)^2 = (\hat{u}_0\hat{v}_0)^2 + 2\hat{u}_0\hat{v}_0 \sum_{i=1}^n \hat{u}_i\hat{v}_i + \hat{w}_1^2 \quad \text{und} \\ &\sum_{i=1}^n (\hat{u}_0\hat{v}_i - \hat{u}_i\hat{v}_0)^2 = \hat{u}_0^2 \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^2 + \hat{v}_0^2 \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 - 2\hat{u}_0\hat{v}_0 \sum_{i=1}^n \hat{u}_i\hat{v}_i \end{aligned}$$

ergeben sofort

$$\begin{aligned} (\hat{u}_0^2 + \ldots + \hat{u}_n^2)(\hat{v}_0^2 + \ldots + \hat{v}_n^2) &= (\hat{u}_0\hat{v}_0)^2 + \hat{u}_0^2 \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^2 + \hat{v}_0^2 \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + \sum_{k=1}^n \hat{w}_k^2 \\ &= (\hat{u}_0\hat{v}_0 + \ldots + \hat{u}_n\hat{v}_n)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{u}_0\hat{v}_i - \hat{u}_i\hat{v}_0)^2 + \sum_{k=2}^n \hat{w}_k^2. \end{aligned}$$

Somit lässt sich $(\hat{u}_0^2 + \ldots + \hat{u}_n^2)(\hat{v}_0^2 + \ldots + \hat{v}_n^2)$ als $2n$-fache Quadratsumme schreiben. Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned} &(u_1^2 + \ldots + u_{2n}^2)(v_1^2 + \ldots + v_{2n}^2) \\ &= \underbrace{(u_1^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + \ldots + v_n^2)}_{n \text{ Quadrate}} \underbrace{(\hat{u}_0^2 + \ldots + \hat{u}_n^2)(\hat{v}_0^2 + \ldots + \hat{v}_n^2)}_{2n \text{ Quadrate}} \end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung der Induktionsvoraussetzung beweist, dass

$$(u_1^2 + \ldots + u_{2n}^2)(v_1^2 + \ldots + v_{2n}^2)$$

eine Summe von $2n$ Quadraten ist.
Wir wissen nun, dass $G_n(L)$ für jeden Körper L eine Gruppe ist. Dies soll auf den Polynomkörper $L = \tilde{K}(x)$ angewandt werden, um zu zeigen, dass

[3] Bei jeder Umnummerierung der u_i sind auch die v_i in gleicher Weise umzunummerieren, damit der Ausdruck $u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ gleich bleibt. Deshalb kann $v_1 \neq 0$ nicht gefordert werden.

$w_1 = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ gewählt werden kann. Die Idee dieses letzten Beweisabschnittes ist auch in [4] auf Seite 164 unter dem „Zusatz bei der Korrektur“ zu finden. Da wir ohne Einschränkungen $U \neq 0$ annehmen können, definiere

$$U = \sum_{i=1}^{2n} u_i^2,\ V = \sum_{i=1}^{2n} v_i^2,\ w_1 = \sum_{i=1}^{2n} u_iv_i \text{ und } d = \frac{1}{U}\sum_{i=1}^{2n}(Uv_i - u_iw_1)^2 \in \tilde{K}.$$

Des Weiteren definiere für $i = 1, \ldots, 2n$ die Polynome

$$V_i := \frac{u_ix + (Uv_i - u_iw_1)}{U} \in \tilde{K}(x).$$

Da $G_n(\tilde{K}(x))$ eine Gruppe ist, wird $U \cdot \sum_{i=1}^{2n} V_i^2$ als Summe von $2n$ Quadraten in $\tilde{K}(x)$ dargestellt. Eine elementare Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} U \cdot \sum_{i=1}^{2n} V_i^2 &= U \cdot \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{u_ix + (Uv_i - u_iw_1)}{U}\right)^2 \\ &= \frac{1}{U} \cdot \left(\sum_{i=1}^{2n}(u_ix)^2 + \sum_{i=1}^{2n} 2u_ix(Uv_i - u_iw_1) + \sum_{i=1}^{2n}(Uv_i - u_iw_1)^2\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{U}\sum_{i=1}^{2n} 2u_ix(Uv_i - u_iw_1) + d. \end{aligned}$$

Der mittlere Summand verschwindet, da

$$\sum_{i=1}^{2n} 2u_ix(Uv_i - u_iw_1) = 2x\left(U\sum_{i=1}^{2n} u_iv_i - w_1\sum_{i=1}^{2n} u_i^2\right) = 2x(Uw_1 - w_1U) = 0$$

gilt. Zusammenfassend erhalten wir

$$U \cdot \sum_{i=1}^{2n} V_i^2 = x^2 + d.$$

Dies ist, wie oben erwähnt, eine Summe von $2n$ Quadraten in $\tilde{K}(x)$, weshalb durch Satz 1.7 impliziert wird, dass d eine Summe von $2n-1$ Quadraten in $\tilde{K}$ ist. Durch die Zuweisung von x auf w_1 erhalten wir zunächst $V_i(w_1) = v_i$ und deshalb gilt

$$w_1^2 + d = UV.$$

Dies ist eine Summe von $2n$ Quadraten in $\tilde{K}$, wobei der erste Summand w_1 entspricht. □

2. Die Stufe von Ringen

Definition 2.1 Sei R ein Ring. Wir bezeichnen

$$s(R) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, e_1, \ldots, e_n \in R : -1 = e_1^2 + \ldots + e_n^2\}$$

als Stufe des Ringes R mit der Konvention $\min(\emptyset) = \infty$.
Ist R ein Körper, so nennen wir R *formal reell*, falls $s(R) = \infty$ und *nichtreell*, falls $s(R) < \infty$.

Beispiele 2.2

1. $s(\mathbb{R}) = \infty$ und $\mathbb{R}$ ist ein formal reeller Körper.
2. $s(\mathbb{C}) = 1$, da $i^2 = -1$.
3. $s(\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]) = 2$, da $-1 = 2^2 + (\sqrt{5}i)^2$ und $-1 \neq x^2$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$.

Folgende Bemerkung wird als Standardargument verwendet, um die Stufe von Ringen abzuschätzen.

Bemerkung 2.3 Die Existenz eines Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$ impliziert die Ungleichung

$$s(R') \leq s(R).$$

Beweis. Falls $-1 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ für geeignete $x_1, \ldots, x_n \in R$, so erhalten wir $-1 = f(-1) = f(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \ldots + f(x_n)^2$ in R'. □

Die Stufe s definiert also einen kontravarianten Funktor $RING \longrightarrow (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$.

2.1. Die Stufe von nichtreellen Körpern

Im Folgenden sei K ein Körper. Da in Ringen mit $1 + 1 = 0$ die Stufe aufgrund von $1^2 = -1$ immer 1 ist, wird $\mathrm{char}(K) \neq 2$ angenommen. Die beiden Theoreme dieses Kapitels sind in [5, Chapter 3] zu finden und werden ähnlich geführt (siehe auch [4]). Die Stufe $s(K)$ nimmt nur gewisse Werte an:

Theorem 2.4 Falls K nichtreell ist, so ist $s(K) = 2^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$, sodass $2^m \leq s(K) < 2^{m+1}$ gilt. Es soll die Gleichung $s := s(K) = 2^m$ hergeleitet werden. Setze $n := 2^m$. Nach Definition der Stufe s, gibt es $x_1, \ldots, x_s \in K$, sodass

$$0 = 1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 + \ldots + x_s^2.$$

Definiere

$$a := 1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \text{ und } b := x_n^2 + \ldots + x_s^2.$$

Da $s-n < 2^{m+1} - 2^m = n$ gilt, wird sowohl a als auch b als Summe von n Quadraten dargestellt[4]. Des Weiteren ist $a \neq 0$, da ansonsten $s(K) \leq n-1 < s$ gilt. Wir nutzen Theorem 1.9 und folgern die Existenz von $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit

$$a \cdot b = c_1^2 + \ldots + c_n^2. \tag{2}$$

Der Rest des Beweises besteht aus wenigen elementaren Rechenschritten.
Aus $a + b = 0$ folgt $b = -a$. Zusammen mit Gleichung 2 erhalten wir

$$a \cdot b = -a^2 = c_1^2 + \ldots + c_n^2.$$

Da $a \neq 0$ ist, ergibt Division durch a die Gleichung

$$-1 = \left(\frac{c_1}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c_n}{a}\right)^2.$$

Mit der Definition der Stufe folgt $s(K) = n = 2^m$. □

Bemerkung 2.5 Im Theorem 2.4 ist K ein Körper. Diese Voraussetzung kann nicht weggelassen werden, denn $s(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 3$.

Beweis. Es gilt $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 = \{0, 1\}$ (durch Nachrechnen). Weiterhin ist $1 \not\equiv -1$ und $1 + 1 \not\equiv -1$, aber $1 + 1 + 1 \equiv -1$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Somit ist $s(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 3$. □

Lemma 2.6 (S.6 Lemma 2.1 in [5]) Sei $K(t)$ der Polynomkörper in einer Variablen über K. Falls die quadratische Form $\varphi := x_1^2 + \ldots x_n^2$ die 0 in $K(t)$ darstellt, so stellt φ die 0 bereits in K dar.

Beweis. Sei $f = (\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_n}{g_n}) \in K(t)^n \setminus \{0\}$ mit $f_i, g_i \in K[t]$ für $i = 1, \ldots, n$, sodass $\varphi(f) = 0$ gilt. Durch Erweitern können wir $g_1 = \ldots = g_n$ annehmen. Durch Multiplizieren von $\varphi(f)$ mit g_1 folgern wir, dass

$$f_1^2 + \ldots + f_n^2 = 0$$

eine nichttriviale Darstellung der 0 ist. Erkläre d als den größten gemeinsamen Teiler aller f_i und finde $h_1, \ldots, h_n \in K[t]$ mit

$$f_i = dh_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Da $K[t]$ ein Integritätsring ist, folgt

$$h_1^2 + \ldots + h_n^2 = 0$$

Des Weiteren ist $h_i(0) \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, denn ansonsten werden alle h_i durch t geteilt, was im Widerspruch zu Wahl von d steht. Folglich ist $h_1(0)^2 + \ldots + h_n(0)^2 = 0$ eine nichttriviale Darstellung der 0 in K. □

[4]Wird b von weniger als n Quadraten dargestellt, können wir beliebig viele 0^2 ergänzen.

Beispiel 2.7 Sei $K(t)$ der Polynomkörper in einer Variablen über K. Dann gilt

$$s(K) = s(K(t)).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.6. $\square$

Wir haben die Grundlage geschaffen, um die erste konkrete Algebra über einem formal reellen Körper zu betrachten. Angepasst an dieses Kapitel wird diese Algebra auch ein Körper sein. Die Definition zielt darauf ab, dass es einfach ist, die -1 als Summe von Quadraten zu schreiben. Die Suche nach der *minimalen* Anzahl an Quadratsummanden wird die größere Herausforderung darstellen.

Theorem 2.8 Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gibt einen Körper L mit $s(L) = 2^m$. Genauer: Sei K ein formal reeller Körper, $n \in \mathbb{N}$, sodass $2^m \leq n < 2^{m+1}$ und $\tilde{K} := K(x_1, \dots, x_n)$ der Quotientenkörper des Polynomrings in n Variablen über K. Zudem definiere

$$d := x_1^2 + \ldots + x_n^2 \in \tilde{K}.$$

Dann hat $L := \tilde{K}(\sqrt{-d})$ die Stufe $s(L) = 2^m$.

Beweis. Sei $y := \sqrt{-d}$. Die Gleichung $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -y^2$ impliziert $s(L) \leq n$. Mit Theorem 2.4 folgt $s(L) \leq 2^m$.
Die Körpererweiterung $K \subset L$ ist von Grad 2, weshalb sich jedes Element $\xi \in L$ als $\xi = f + yg$ mit $f, g \in \tilde{K} = K(x_1, \dots, x_n)$ schreiben lässt. Wir nehmen $s(L) < 2^m$ an und wollen einen Widerspruch erzeugen. Die Ungleichung $s(L) < 2^m$ ist in L äquivalent zur Existenz von Elementen $f_1, \dots, f_{2^m}, g_1, \dots, g_{2^m} \in K$, sodass

$$\sum_{i=1}^{2^m} (f_i + g_i y)^2 = 0 \tag{3}$$

und nicht alle f_i, g_i verschwinden[5]. Das Auflösen von Gleichung 3 liefert die Zusammenhänge

$$\sum_{i=1}^{2^m} f_i^2 + y^2 \sum_{i=1}^{2^m} g_i^2 = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{2^m} f_i g_i = 0. \tag{4}$$

Die Anwendung von Theorem 1.9 auf $\sum_{i=1}^{2^m} f_i^2$ und $\sum_{i=1}^{2^m} g_i^2$ impliziert die Existenz von passenden $h_2, \dots, h_{2^m} \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{2^m} f_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2^m} g_i^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{2^m} f_i g_i \right)^2}_{=0} + \sum_{i=2}^{2^m} h_i^2 = \sum_{i=2}^{2^m} h_i^2.$$

[5]Wähle z.B. $g_1 = 0$ und $f_1 = 1$

Mit Gleichung 4 erhalten wir unter Verwendung der Notation $a := \sum_{i=1}^{2^m} f_i^2$ und $b := \sum_{i=1}^{2^m} g_i^2$, dass

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -y^2 = \frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \frac{\sum_{i=2}^{2^m} h_i^2}{b^2} = \sum_{i=2}^{2^m} \left(\frac{h_i}{b}\right)^2.$$

Dabei ist $b \neq 0$, da wir $\tilde{K}$ durch Beispiel 2.7 als formal reell nachweisen. Aus diesem Grund bildet $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ eine Summe von $2^m - 1 < n$ Quadraten in $\tilde{K}$. Dies steht im Widerspruch zu Satz 1.8. Die Ungleichung $s(L) < 2^m$ ist also nicht möglich. □

Bemerkung 2.9 Das Theorem 2.8 gilt auch für alle Körper K mit $s(K) \geq n$, da in Satz 1.8 nur gefordert wird, dass -1 keine Summe von $n-1$ Quadraten ist. Sei hier auch an Beispiel 2.7 erinnert, wodurch auch $b \neq 0$ in der Notation von 2.8 gefordert werden kann.

Bemerkung 2.10 Es stellt sich die Frage, ob für einen gegebenen Integritätsring R mit Stufe $s(R)$ die Stufe des Quotientenkörpers $\mathrm{Quot}(R)$ die größte Zweierpotenz kleiner oder gleich $s(R)$ ist. Diese Behauptung trifft im Allgemeinen nicht zu, wie folgende zwei Beispiele belegen:

- Betrachte $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}, i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$. Angenommen es gäbe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit

  $$-1 = (c + (a+ib)\sqrt{5})^2 = c^2 + 5(a+ib)^2 + 2c(a+ib)\sqrt{5},$$

  so ist $2c(a+ib) = 0$ und damit $c = 0$ oder $a + ib = 0$. Beides ergibt einen Widerspruch. Also ist $s(R) \geq 2$. Allerdings ist $i = \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}} \in \mathrm{Quot}(R)$, weshalb $s(\mathrm{Quot}(R)) = 1$.

- Das zweite Beispiel zeigt einen noch extremeren Fall, in dem $s(R) = \infty$ und $s(\mathrm{Quot}(R)) = 1$ gilt.
  Betrachte $R = \mathbb{Z}[X, iX]$. Der Ring R ist eine Teilmenge des Ringes $\mathbb{Z}[i, X]$. Durch eine triviale Rechnung kann dies folgendermaßen spezifiziert werden: Ein Polynom $f = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ aus $\mathbb{Z}[i, X]$ ist genau dann in R, falls $a_0 \in \mathbb{Z}$. Angenommen es gäbe Polynome $f_1, \ldots, f_n \in R$ mit

  $$-1 = f_1^2 + \ldots + f_n^2.$$

  Dann berechnet sich -1 als Quadratsumme der nullten Koeffizienten der f_i, welche Elemente in $\mathbb{Z}$ sind. Dies ist ein Widerspruch.
  Die Stufe von R ist also ∞. Der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ enthält hingegen die imaginäre Einheit i und hat folglich Stufe 1.

Ebenfalls interessant ist es, die Stufe von endlichen Körpern zu untersuchen. Sei im Folgenden F ein endlicher Körper. Ein bekanntes Argument aus der Algebra impliziert, dass die Anzahl $q := |F|$ der Elemente von F einer Primpotenz entsprechen, d.h. $q = p^n$ mit p prim. Da, wie oben erwähnt, der Fall $\mathrm{char}(F) = 2$ für die Stufe nicht interessant ist, nehmen wir $p \neq 2$ an. Wir benötigen zunächst ein Lemma:

Lemma 2.11 (Thm. 3, S. 6 in [6]) Ist $p \neq 2$ eine Primzahl und F ein Körper mit $|F| = p^n = q$, so hat die Untergruppe $F^{*2} := \{x^2 \mid x \in F^*\}$ von $F^* = F \backslash \{0\}$ Index 2. Dies bedeutet $F^*/F^{*2} \cong \{\pm 1\}$.

Beweis. Sei Ω ein algebraischer Abschluss von F. Eine Anwendung des kleinen Satz von Fermat ergibt folgende Aussage: Ein Element $y \in \Omega$ liegt genau dann in F, wenn $y^{p-1} = 1$ gilt.
Da $p \neq 2$ gewählt wurde, ist $\frac{p-1}{2}$ eine natürliche Zahl. Dies zeigt die Wohldefiniertheit des Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : F^* &\longrightarrow F^* \\ x &\longmapsto x^{\frac{p-1}{2}}. \end{aligned}$$

Sei $x \in F$ und $y \in \Omega$ mit $y^2 = x$. Dann ist $\varphi(x) = 1$ äquivalent zu $y^{p-1} = 1$, was nach obiger Bemerkung gleichbedeutend zu $y \in F$ ist. Somit gilt $\ker(\varphi) = F^{*2}$. Zudem berechnet sich $\varphi(x)^2 = x^{p-1} = 1$, weshalb φ nur die Werte ± 1 annehmen kann. Da das Polynom $t^{\frac{p-1}{2}} - 1$ in F maximal $\frac{p-1}{2} < p - 1$ Nullstellen haben kann, gibt es mindestens ein $z \in F$ mit $\varphi(z) = -1$. Zusammengefasst ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow F^{*2} \hookrightarrow F^* \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow 0$$

exakt. Dies beweist die Aussage. □

Proposition 2.12 Jeder endliche Körper F hat Stufe ≤ 2.

Beweis. Die Stufe s von F ist endlich. Angenommen -1 wäre kein Quadrat in F. Seien also $x_1, \ldots, x_s \in F$ mit $-1 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2$. Es gilt $x_1^2 + x_2^2 \notin F^{*2}$, da ansonsten $s(F) < s$ wäre. Mit der Annahme $-1 \notin F^{*2}$, folgt durch Lemma 2.11, dass ein $z \in F^{*2}$ existiert mit

$$-1 = z(x_1^2 + x_2^2).$$

Da z als Quadrat gewählt wurde, ist -1 die Summe von zwei Quadraten. □

Korollar 2.13 Jeder nichtreelle Körper K mit Stufe $s(K) > 2$ ist eine $\mathbb{Q}$-Algebra. Das heißt $\mathbb{Q} \subset K$, bzw. $\mathrm{char}(K) = 0$.

Beweis. Angenommen $p = \mathrm{char}(K) \neq 0$, dann ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein endlicher Unterkörper von K. In diesem ist nach Proposition 2.12 die -1 eine Summe von zwei Quadraten. Also gilt $s(K) \leq 2$. Widerspruch. □

2.2. Der allgemeine Fall

Theorem 2.4 gilt nach Bemerkung 2.5 nicht für beliebige Ringe.
Allgemeingültige Regeln zu finden ist schwer und nicht Ziel dieser Arbeit. Es soll allerdings für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein konkreter (Integritäts-)Ring mit Stufe n gefunden werden. Diese Aussage soll sogar soweit verschärft werden, dass es für jeden Ring R mit Stufe ∞ und jedes $n \in \mathbb{N}$ eine R-Algebra mit Stufe n gibt. Doch kommen wir zunächst zurück zu dem Spezialfall $\mathbb{R}$:

Theorem 2.14 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die $\mathbb{R}$-Algebra

$$A_{n,\mathbb{R}} := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{5}$$

ein Integritätsring und hat die Stufe $s(A_{n,\mathbb{R}}) = n$.

Beweis. Für den Beweis dieses Theorems ist einiges an topologischer Vorarbeit nötig, in welche unter anderem der Satz von Borsuk-Ulam einfließt. Der Beweis ist am Ende von Kapitel 3 in 3.16 zu finden. Siehe auch [5, S. 44 Thm. 2.3]. □

Diese konkrete $\mathbb{R}$-Algebra ist nicht nur aufgrund der Integritätseigenschaft von Interesse, sondern hat eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft:

Korollar 2.15 Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra. A hat die Stufe $s(A) \leq n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn es einen $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus $A_{n,\mathbb{R}} \to A$ gibt.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $s(A) \leq n$ gilt. Seien $a_1, \ldots, a_n \in A$, sodass

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = -1.$$

Definiere die Abbildung $f \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to A$ durch $x_i \mapsto a_i$ mithilfe der universellen Eigenschaft des Polynomrings. Die Erkenntnis $1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 \in \ker(f)$ liefert mit der universellen Eigenschaft des Quotienten einen $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus $A_{n,\mathbb{R}} \to A$.
Die umgekehrte Implikation wird durch Bemerkung 2.3 und Theorem 2.14 bewiesen. □

3. Die Stufe von topologischen Räumen

In diesem Kapitel wird eine Definition für die Stufe von topologischen Räumen entwickelt, der Zusammenhang mit der ursprünglichen Definition 2.1 hergestellt und der Satz von Borsuk-Ulam bewiesen. Am Ende werden wir in der Lage sein, das Theorem 2.14 zu behandeln.

3.1. Der Satz von Borsuk-Ulam

Im Folgenden soll ein Beweis für den Satz von Borsuk-Ulam angegeben werden. Wir benötigen unter anderem Wissen über Überdeckungen, den reellen projektiven Raum und Homologiegruppen. Für letztere sei eine Konstruktion dieser durch n-dimensionale Simplizes und die zugehörigen Kettenkomplexe gefordert. Dabei folgen wir den den Definitionen aus [2, Ch. 2, S.108-137]. Beim Leser setzen wir eine fundierte Grundlage über die genannten Kapitel bzw. singuläre Homologie voraus. Zelluläre Homologie wird in dieser Arbeit nicht von Bedeutung sein. Die wichtigsten Aussagen und Definitionen sind im Anhang B.2 zu finden.
Der Beweis des Theorems 3.3 und anschließendes Korollar wird analog zu [2, S. 174 ff.] geführt.
Zunächst wollen wir einen kurzen Überblick über die geltenden Definitionen bzgl. der singulären Homologie machen:

Erinnerung 3.1 Sei X ein topologischer Raum.
Definiere $\mathrm{Sing}_n(X) := \mathrm{Hom}_{Top}(\Delta^n, X)$ als die Menge der stetigen Abbildungen von dem n-dimensionalen Simplex in den Raum X.
Des Weiteren erkläre für eine abelsche Gruppe A die Gruppe

$$C_n(X,A) := \mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_n(X)] \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

wobei $\mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_n(X)] := \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Sing}_n[X]} \mathbb{Z}$ die über $\mathrm{Sing}_n(X)$ frei erzeugte abelsche Gruppe ist.
Jedes Element $x \in C_n(X,A)$ kann als endliche Summe

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_i$$

interpretiert werden, wobei $\sigma_i \in \mathrm{Sing}_n(X)$ gilt und die Koeffizienten a_i aus der abelschen Gruppe A stammen. Zudem zeigen einfache Zusammenhänge aus der Algebra folgende Regeln:

- Es ist $a_1\sigma_0 + a_2\sigma_0 = (a_1 + a_2)\sigma_0$
- Falls sich die σ_i in obiger Summe paarweise unterscheiden, so ist diese Darstellung (bis auf Kommutativität von „+“) bereits eindeutig.
- Sei für alle $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$ eine Zuweisungen $\sigma \mapsto b_\sigma \in B$ gegeben. Dies definiert eindeutig einen Gruppenhomomorphismus $C_n(X,A) \to B \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

Diese Konventionen werden wir später auch in den Beweisen verwenden.
Definiere nun für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_n \colon C_n(X,A) &\longrightarrow C_{n-1}(X,A) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_{i,n}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne $\delta_{i,n}\colon \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ die üblichen Inklusionsabbildungen, die im Anhang B.2.2 genauer erläutert sind. Die genaue Konstruktion der d_n wird im Folgenden kaum eine Rolle spielen.
Wir erhalten einen Kettenkomplex:

$$\cdots \longrightarrow C_n(X,A) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X,A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X,A) \xrightarrow{d_1} C_0(X,A) \longrightarrow 0.$$

Dass dies tatsächlich einen Kettenkomplex darstellt, kann in [2, S. 108 f.] nachgelesen werden. Zuletzt definiere

$$H_n(X,A) := \ker(d_n)/\operatorname{im}(d_{n+1})$$

als die n-te Homologiegruppe des obigen Kettenkomplexes.

Wir leiten den Beweis für den Satz von Borsuk Ulam durch eine Bemerkung ein:

Bemerkung 3.2 Sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine zweiseitige Überdeckung. Da die n-dimensionalen Simplexe Δ^n einfach zusammenhängend sind und alle Voraussetzungen für das Liftingkriterium B.4 erfüllen, gibt es für jede stetige Abbildung $\sigma\colon \Delta^n \to X$ genau zwei Lifts[6] $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\colon \Delta^n \to \tilde{X}$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \tau\colon C_n(X,\mathbb{Z}_2) &\longrightarrow C_n(\tilde{X},\mathbb{Z}_2) \\ \sigma &\longmapsto \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2. \end{aligned}$$

Wie üblich sei

$$\begin{aligned} p_*\colon C_n(\tilde{X},\mathbb{Z}_2) &\longrightarrow C_n(X,\mathbb{Z}_2) \\ \sigma &\longmapsto p \circ \sigma. \end{aligned}$$

Die beiden Abbildungen bilden eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\{0\} \longrightarrow C_*(X,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\ \tau\ } C_*(\tilde{X},\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\ p_*\ } C_*(X,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \{0\}\ .$$

Beweis.
p_* ist surjektiv: Da Δ^n einfach-zusammenhängend ist, folgt dies direkt aus dem Liftingkriterium B.4. Ist $\sigma\colon \Delta^n \to X$ eine stetige Abbildung, so existiert eine stetige Abbildung $\tilde{\sigma}\colon \Delta^n \to \tilde{X} \in C_n(\tilde{X},\mathbb{Z}_2)$ mit $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.
τ ist injektiv: Für zwei unterschiedliche stetige Abbildungen $\Delta^n \to X$ sind die vier zugehörigen Lifts paarweise verschieden. Durch die Regeln in Erinnerung 3.1 folgt, dass τ injektiv ist.
$\operatorname{im}(\tau) = \ker(p_*)$: Ist $\sigma\colon \Delta^n \to X$ eine stetige Abbildung und sind $\sigma_1, \sigma_2\colon \Delta^n \to \tilde{X}$ die dazugehörigen Lifts, so ist $p_*(\tau(\sigma)) = p_*(\sigma_1) + p_*(\sigma_2) = 2\sigma = 0$. Das zeigt

[6] Siehe auch Bemerkung B.5.

$\mathrm{im}(\tau) \subset \ker(p_*)$.
Ein Element $x \in C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2)$ kann geschrieben werden als: $x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{\sigma_i} \colon \Delta^n \to \tilde{X}$. Da die Koeffizientengruppe $\mathbb{Z}_2$ ist, kann gefordert werden, dass $\tilde{\sigma_1}, \ldots, \tilde{\sigma_n}$ paarweise verschieden sind. Ist $p_*(x) = 0$, so gilt $0 = \sum_{i=1}^{n} p_*(\tilde{\sigma_i})$ und damit gibt es zu jedem i ein $j \neq i$, sodass $p_*(\tilde{\sigma_i}) = -p_*(\tilde{\sigma_j}) = p_*(\tilde{\sigma_j})$. Nach Annahme sind $\tilde{\sigma_i}$ und $\tilde{\sigma_j}$ zwei verschiedene Lifts von $p_*(\tilde{\sigma_i})$. Die Eindeutigkeit im Liftingkriterium impliziert $\tilde{\sigma_i} + \tilde{\sigma_j} \in \mathrm{im}(\tau)$. Angewandt auf alle Summanden von x ergibt dies $\mathrm{im}(\tau) \supset \ker(p_*)$.
<u>Verträglichkeit mit d_n</u>: Die Verträglichkeit mit d_n kann durch triviales Nachrechnen eingesehen werden. □

Die Situation aus Bemerkung 3.2 liefert folglich eine lange exakte Sequenz in den Homologiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} H_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

Eine Anwendung ergibt sich im nachfolgenden Theorem anhand von $X = \mathbb{R}P^n$ (n-dimensionaler projektiver Raum), $\tilde{X} = S^n$ (n-dimensionale Sphäre) und der kanonischen Projektion $p \colon S^n \to \mathbb{R}P^n$.

Theorem 3.3 Eine stetige Abbildung $f \colon S^n \to S^n$ mit der Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$ hat ungeraden Grad.

Beweis. Ziel ist es, zu zeigen, dass

$$f_* \colon \underbrace{H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)}_{=\mathbb{Z}_2} \to \underbrace{H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)}_{=\mathbb{Z}_2}$$

ein Isomorphismus ist. Die Abbildung f hat dann ungeraden Grad (siehe z.B. B.12). Um die Ausdrücke etwas zu verkürzen, werden wir die Koeffizientengruppen $\mathbb{Z}_2$ in der Notation weglassen. Wir schreiben beispielsweise $H_k(S^n)$ statt $H_k(S^n, \mathbb{Z}_2)$. Die Grundlage für den Beweis besteht aus zwei Schritten.

Zunächst wollen wir die lange exakte Sequenz betrachten, die aus der zweiseitigen Überdeckung $p \colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ und der kurzen exakten Sequenz aus Bemerkung 3.2 hervorgeht. Wir erhalten:

$$\cdots \longrightarrow H_k(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\tau} H_k(S^n) \xrightarrow{p_*} H_k(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow \cdots$$

Durch B.11 und B.18 werden einige Vereinfachungen möglich gemacht. Diese statuieren $H_{n+1}(\mathbb{R}P^n) = 0$ und $H_k(S^n) = 0$ für $k \neq 0, n$. Für $n > 1$ gilt

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\tau} \overbrace{H_n(S^n)}^{\cong\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_k(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_0(\mathbb{R}P^n)}_{\cong\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\tau} \underbrace{H_0(S^n)}_{\cong\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{p_*} \underbrace{H_0(\mathbb{R}P^n)}_{\cong\mathbb{Z}_2} \longrightarrow 0,$$

wobei die angedeuteten Isomorphismen zu $\mathbb{Z}_2$ von Theorem B.11 und Satz B.13

stammen. Die Exaktheit der Sequenz liefert zunächst $H_1(\mathbb{R}P^n) \cong H_0((\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ und induktiv $H_k(\mathbb{R}P^n) \cong H_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ für $k < n$.
In der Teilsequenz

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\tau} \underbrace{H_n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_{n-1}(\mathbb{R}P^n)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

ist δ surjektiv und τ injektiv. Dies ist nur möglich, falls auch $H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$.
Alle Terme in obiger langen exakten Sequenz sind daher entweder 0 oder isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ und daher sind die enthaltenen Abbildungen Isomorphismen oder Nullabbildungen. Es fällt auf, dass jedes δ ein Isomorphismus ist.

Für $n = 1$ können wir eine ähnliche Situation ableiten. Hier handelt es sich um die Sequenz

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^1) \xrightarrow{\tau} \underbrace{H_1(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{p_*} H_1(\mathbb{R}P^1) \xrightarrow{\delta} \underbrace{H_0(\mathbb{R}P^1)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\tau} \underbrace{H_0(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \xrightarrow{p_*} \underbrace{H_0(\mathbb{R}P^1)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \longrightarrow 0.$$

Auch $p_*\colon H_0(S^1) \to H_0(\mathbb{R}P^1)$ muss ein Isomorphismus sein, wodurch sich $0 = \tau\colon H_0(\mathbb{R}P^1) \to H_0(S^1)$ ergibt. Die Exaktheit impliziert, dass δ injektiv ist und $\tau\colon H_1(\mathbb{R}P^1) \to H_1(S^1)$ surjektiv. Erneut folgern wir, dass $H_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}_2$ gilt und sich Nullabbildungen und Isomorphismen in dem Diagramm für $n = 1$ abwechseln.

Im zweiten Teil wollen wir untersuchen, wie sich f auf die lange exakte Sequenz auswirkt. Die Abbildung f induziert aufgrund von $f(-x) = -f(x)$ eine stetige Abbildung $\bar{f}\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$. Folglich erhalten wir Abbildungen $f_*\colon C_k(S^n) \to C_k(S^n)$ und $\bar{f}_*\colon C_k(\mathbb{R}P^n) \to C_k(\mathbb{R}P^n)$. Wir wollen zeigen, dass diese Abbildungen mit der kurzen exakten Sequenz aus Bemerkung 3.3 verträglich sind, das heißt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_k(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & C_k(S^n) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] & C_k(\mathbb{R}P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_k(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\tau"] & C_k(S^n) \arrow[r, "p_*"] & C_k(\mathbb{R}P^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Für das rechte Quadrat ist das die Definition $p \circ f = \bar{f} \circ p$ zusammen mit den Definitionen von f_* und p_*.
Kommen wir zum linken Quadrat. Sei $\sigma\colon \Delta^k \to \mathbb{R}P^n$ eine stetige Abbildung und $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\colon \Delta^k \to S^n$ die beiden dazugehörigen Lifts. Wir haben die Abbildungen so definiert, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & S^n \arrow[dd, "p"] \\
 & S^n \arrow[ur, "f"] \arrow[d, "p"] & \\
\Delta^k \arrow[ur, "\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2"] \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Folglich sind $f \circ \tilde{\sigma}_1$ und $f \circ \tilde{\sigma}_2$ Lifts von $\bar{f} \circ \sigma$. Falls $f \circ \tilde{\sigma}_1$ und $f \circ \tilde{\sigma}_2$ verschieden sind, muss nach Definition

$$\tau(\bar{f}_*(\sigma)) = \tau(\bar{f} \circ \sigma) = f \circ \tilde{\sigma}_1 + f \circ \tilde{\sigma}_2 = f_*(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) = f_*(\tau(\sigma))$$

gelten. In diesem Fall ist die Verträglichkeit gezeigt. Sei $x \in \Delta^k$ mit $\tilde{\sigma}_1(x) \neq \tilde{\sigma}_2(x)$. Da aber $p \circ \tilde{\sigma}_1 = p \circ \tilde{\sigma}_2$ gilt, muss folglich $\tilde{\sigma}_1(x) = -\tilde{\sigma}_2(x)$ sein und deshalb ist $f(\tilde{\sigma}_2(x)) = -f(\tilde{\sigma}_1(x)) \neq f(\tilde{\sigma}_1(x))$, wodurch die Kommutativität des linken Quadrats gezeigt wurde.

Die Natürlichkeit der langen exakten Sequenz impliziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & H_k(S^n) & \xrightarrow{p_*} & H_k(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{k-1}(\mathbb{R}P^n) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* & \\ \cdots \longrightarrow & H_k(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & H_k(S^n) & \xrightarrow{p_*} & H_k(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{k-1}(\mathbb{R}P^n) & \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{6}$$

kommutiert. Wir beweisen induktiv über k, dass $f_*\colon H_k(S^n) \to H_k(S^n)$ und $\bar{f}_*\colon H_k(\mathbb{R}P^n) \to H_k(\mathbb{R}P^n)$ Isomorphismen sind.

Für $k = 0$ folgt dies aus Basiswissen über die nullte Homologiegruppe $H_0(S^n)$, bzw. der Konstruktion im Beweis des Satzes B.13. Denn sei $\sigma\colon \Delta^0 = \{1\} \to S^n$ ein Erzeuger von $H_k(S^n)$. Da die Elemente $f \circ \sigma(1)$ und $\sigma(1)$ in der selben Zusammenhangskomponente von S^n liegen, gilt $[f \circ \sigma] = [\sigma] \in H_0(S^n)$. Analoge Begründungen sind für $\mathbb{R}P^n$ möglich.

Sei $n \geq k > 1$. Im Diagramm 6 ist, wie oben erwähnt, δ ein Isomorphismus, weshalb $p_* = 0$ gilt und somit τ bijektiv ist[7]. Die Induktionsvoraussetzung gibt zudem an, dass $\bar{f}_*\colon H_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \to H_{k-1}(\mathbb{R}P^n)$ ein Isomorphismus ist. Im rechten Quadrat von 6 befinden sich drei Isomorphismen[8], weshalb auch die vierte Abbildung $\bar{f}_*\colon H_k(\mathbb{R}P^n) \to H_k(\mathbb{R}P^n)$ bijektiv ist. Für das linke Quadrat in 6 kommt nun das selbe Argument zu tragen, weshalb $f_*\colon H_k(S^n) \to H_k(S^n)$ bijektiv ist.

Insbesondere ist $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ ein Isomorphismus. □

Korollar 3.4 (Der Satz von Borsuk-Ulam) Für jede stetige Abbildung $g\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $g(x) = g(-x)$.

Beweis. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto g(x) - g(-x). \end{aligned}$$

Offenbar gilt $f(-x) = -f(x)$. Das Theorem ist bewiesen, falls f eine Nullstelle hat. Angenommen $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, so ersetze f mit der Abbildung $h := \frac{f}{|f|} : S^n \to S^{n-1}$, welche immer noch stetig ist und obige Eigenschaft erfüllt. Wir erhalten eine Abbildung $S^{n-1} \hookrightarrow S^n \xrightarrow{h} S^{n-1}$, die nach Theorem 3.3 ungeraden Grad hat. Allerdings

[7] Da alle Terme 0 oder isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ sind, ist Surjektivität und Injektivität äquivalent.

[8] Zweimal δ und einmal $\bar{f}$

ist die Inklusion $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ nullhomotop[9], weshalb auch die Komposition mit h nullhomotop ist. Da die Homologiegruppen unter Homotopie invariant sind, folgt, dass obige Komposition Grad 0 hat. Widerspruch. $\square$

3.2. Involutionen und die Stufe von topologischen Räumen

Um die Stufe mit Topologie in Verbindung zu bringen, benötigen wir einige Definitionen und Aussagen, die sich in diesem Unterkapitel an [5, Chapter 3 §3] anlehnen.

Definition 3.5 (Involution) Sei X ein topologischer Raum. Eine Involution auf X ist eine stetige Abbildung

$$i_X : X \longrightarrow X$$

mit der Eigenschaft ${i_X}^2 = id_X$.

Wir betrachten im Folgenden Tupel (X, i_X) (bzw.(Y, i_Y)), wobei X (bzw. Y) ein topologischer Raum und i_X (bzw. i_Y) eine Involution auf dem entsprechenden Raum ist.

Definition 3.6 (äquivariant) Eine stetige Abbildung

$$f\colon X \longrightarrow Y$$

heißt *äquivariant* bezüglich der zugehörigen Involutionen, falls

$$f \circ i_X = i_Y \circ f$$

Für eine äquivariante Abbildung f schreiben wir $f\colon (X, i_X) \multimap\!\!\!\longrightarrow (Y, i_Y)$. Ist klar, welche Involutionen gemeint sind, werden diese später auch weggelassen.

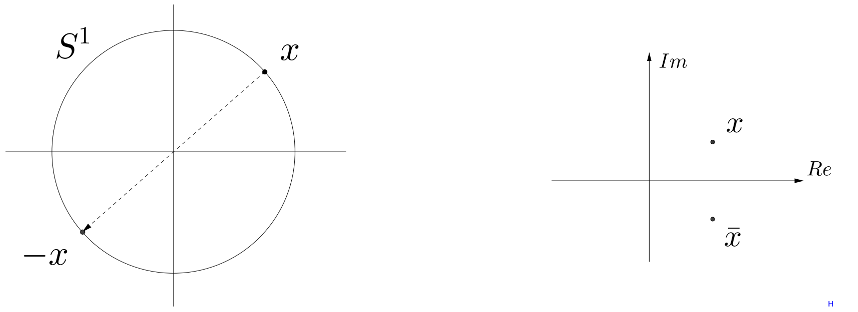
Bemerkung 3.7 (Die Kategorie der topologischen Räume mit Involution) Mit obiger Definition ist es möglich eine Kategorie zu bilden:

- Ihre Objekte sind Tupel der Form (X, i_X) mit X ein topologischer Raum und i_X eine Involution auf X.
- Die Morphismen sind äquivariante stetige Abbildungen.

Wir werden diese Kategorie $TOPI$ nennen.

Beispiele 3.8

1. Sei $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = S^{n-1}$ die $n-1$-dimensionale Sphäre. Definiere für $x \in X$: $i(x) := -x$. Die Abbildung i bildet eine Involution auf X. Diese nennen wir *antipodale Abbildung* und schreiben $(X, -)$ statt (X, i).



(a) Die antipodale Abbildung auf S^1

(b) Die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$

Abbildung 1: Beispiele für Involutionen

2. Die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}^n$ bildet ebenfalls eine Involution.

Die Stufe von topologischen Räumen kann nun eingeführt werden.

Definition 3.9 Sei $(X, i) \in TOPI$. Definiere die *Stufe von* (X, i) als

$$s(X, i) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists f \colon (X, i) \mathrel{-\!\circ\!\!\longrightarrow} (S^{n-1}, -)\}$$

mit der Konvention $\min(\emptyset) = \infty$.

Bemerkung 3.10 Falls eine äquivariante Abbildung $\varphi : (X, i) \mathrel{-\!\circ\!\!\longrightarrow} (Y, j)$ für (X, i), $(Y, j) \in TOPI$ existiert, so gilt $s(X, i) \leq s(Y, j)$.

Beweis. Sei $f \colon (Y, j) \mathrel{-\!\circ\!\!\longrightarrow} (S^{n-1}, -)$, dann ist $f \circ \varphi : (X, i) \mathrel{-\!\circ\!\!\longrightarrow} (S^{n-1}, -)$ und folglich $s(X, i) \leq n$. □

Das heißt die Stufe definiert einen Funktor $s : TOPI \longrightarrow (\mathbb{N} \cup \infty, \leq)$.

Wie folgendes Lemma zeigt, sind für die Stufe nur Involutionen ohne Fixpunkte interessant.

Lemma 3.11 Sei $(X, i) \in TOPI$. Die Existenz eines Fixpunktes von i impliziert $s(X, i) = \infty$.

Beweis. Sei x ein Fixpunkt von i. Angenommen es gäbe $f \colon (X, i) \mathrel{-\!\circ\!\!\longrightarrow} (S^{n-1}, -)$. Durch Definition von äquivarianten Abbildungen folgt

$$f(x) = f(i(x)) = -f(x) \in S^{n-1},$$

wodurch ein Widerspruch erzeugt wird. □

[9] Zum Süd- bzw. Nordpol der Sphäre.

Theorem 3.12 (Version des Satzes von Borsuk-Ulam) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$s(S^{n-1}, -) = n.$$

Beweis. Sei $m < n$. Falls $f\colon (S^{n-1}, -) \multimap (S^{m-1}, -)$ eine äquivariante Abbildung ist, so erhalten wir für ein beliebiges x die Gleichung

$$f(-x) = -f(x). \tag{7}$$

Der Satz von Borsuk-Ulam 3.4 angewandt auf $f|_{S^m}$ impliziert, dass es ein $x \in S^{m-1}$ mit $f(x) = f(-x)$ gibt. Das ist ein Widerspruch zu Gleichung 7. Deshalb ist $s(S^{n-1}) \geq n$. Da die Identität auf S^{n-1} eine äquivariante Abbildung ist, folgt das Theorem. □

Nun ist die Stufe von topologischen Räumen definiert. Wir wollen den Zusammenhang mit der Stufe von Ringen herstellen.

Definition 3.13 Sei $(X, i) \in TOPI$. Definiere die $\mathbb{R}$-*Algebra von Funktionen auf (X,i)* als

$$A_{X,i} := \mathrm{Hom}_{TOPI}((X, i), (\mathbb{C}, \bar{\cdot})) = \{f\colon (X, i) \multimap (\mathbb{C}, \bar{\cdot})\}.$$

Zusammen mit punktweiser Addition und Multiplikation bildet $A_{X,i}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Bemerkung 3.14 Definition 3.13 gibt einen kontravarianten Funktor

$$A\_ = \mathrm{Hom}_{TOPI}(\ \_\ , (\mathbb{C}, \bar{\cdot})) : TOPI \longrightarrow \mathbb{R}ALG.$$

Dieser wird folgendermaßen definiert:

$$\text{Auf Objekte: } (X, i) \longmapsto A_{X,i}$$

$$\text{Auf Morphismen: } (g\colon (X, i) \multimap (Y, j)) \longmapsto \begin{pmatrix} g^* : A_{Y,j} \to A_{X,i} \\ f \mapsto f \circ g \end{pmatrix}$$

Dabei ist leicht zu überprüfen, dass g^* ein $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus ist.

Als Folge des Theorems von Borsuk-Ulam in Verbindung mit einigen Rechnungen, erhalten wir folgendes Theorem:

Theorem 3.15 Sei $(X, i_X) \in TOPI$. Dann gilt

$$s(A_{X,i_X}) = s(X, i_X). \tag{8}$$

Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Stufe n.

Beweis. In diesem Beweis sei $i := \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. In einem vorbereitenden Schritt wollen wir $s(A_{S^{n-1},-}) \leq n$ zeigen. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$ definiere $f_k(x) = i \cdot pr_k(x) = ix_k$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt offensichtlich $f_k \in A_{S^{n-1},-}$. Berechne

$$(f_1^2 + \ldots + f_n^2)(x) = i^2 \cdot (x_1^2 + \ldots + x_n^2) = -1 \cdot ||x|| = -1.$$

Hier bezeichnet $||\cdot||$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$. Damit ist $s(A_{S^{n-1},-}) \leq n$ gezeigt.

In Gleichung 8 soll zunächst „$\leq$“ bewiesen werden: Falls $f\colon (X, i_X) \multimap\!\!\longrightarrow (S^{n-1}, -)$ eine äquivariante Abbildung ist, erhalten wir durch Ausnutzung der Bemerkung 3.14 zunächst einen $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus $f^* : A_{S^{n-1},-} \to A_{X,i_X}$ und anschließend durch Bemerkung 2.3 die Ungleichung $s(A_{X,i_X}) \leq s(A_{S^{n-1},-}) \leq n$. Die Definition der Stufe von topologischen Räumen liefert $s(A_{X,i_X}) \leq s(X, i_X)$.

Da nun „$\leq$“ gezeigt wurde, können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $n := s(A_{X,i_X})$ endlich ist.
Nach Definition gibt es $f_1, \ldots, f_n \in A_{X,i_X} = \mathrm{Hom}_{TOPI}((X, i_X), (\mathbb{C}, \bar{\cdot}))$ mit der Eigenschaft

$$f_1^2 + \ldots + f_n^2 = -1.$$

Seien $p_j = \mathrm{Re}(f_j)$ und $q_j = \mathrm{Im}(f_j)$ (für $j = 1, \ldots, n$) der Real- und Imaginärteil von f_j. Für jedes $x \in X$ gilt $q_j(x) \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, denn ansonsten würde die Gleichung $-1 = f_1(x)^2 + \ldots + f_n(x)^2 = p_1(x)^2 + \ldots + p_n(x)^2$ gelten[10]. Wir erhalten eine wohldefinierte und stetige Abbildung auf X:

$$\begin{aligned} q : X &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \frac{(q_1(x), \ldots, q_n(x))}{\sqrt{q_1(x)^2 + \ldots + q_n(x)^2}} \end{aligned}$$

Da f_j für jedes j äquivariant (bzgl. i_X und $\bar{\cdot}$) ist, gilt

$$f(i_X(x)) = \overline{f_j(x)} = p_j(x) - iq_j(x).$$

Daraus folgt $q_j(i_X(x)) = -q_j(x)$. Wir erhalten $q(i_X(x)) = -q(x)$, wodurch q als äquivariante Abbildung $(X, i_X) \multimap\!\!\longrightarrow (S^n, -)$ nachgewiesen wurde. Die Definition der Stufe impliziert

$$s(X, i_X) \leq n = s(A_{X,i_X}).$$

Dies beweißt das Theorem.
Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ haben wir insbesondere die Gleichheit $s(A_{S^{n-1},-}) = s(S^{n-1}, -) = n$. □

[10] Dies stellt einen Widerspruch zu $s(\mathbb{R}) = \infty$ dar.

Obige Konstruktion ergibt einen Ring, bzw eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Stufe n. Dessen Elemente lassen sich im Allgemeinen nur schwer beschreiben. Zudem bildet obiger Ring keinen Integritätsring. Dies sind nur zwei der Vorteile des konkreten Integritätsring des Theorem 2.14, welches im Folgenden bewiesen wird.

Theorem 3.16 (S. 44 Thm. 2.3 [5]) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die $\mathbb{R}$-Algebra

$$A_{n,\mathbb{R}} := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{9}$$

ein Integritätsring und hat die Stufe $s(A_{n,\mathbb{R}}) = n$.

Beweis. Wir gehen ähnlich zu [5, S. 44 Thm. 2.3] vor. Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Zunächst soll gezeigt werden, dass $A_{n,\mathbb{R}}$ tatsächlich ein Integritätsring ist, anschließend wird $s(A_{n,\mathbb{R}}) = n$ bewiesen.

1. Es reicht nachzuweisen, dass $\varphi = 1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ prim in $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Da $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein faktorieller Ring ist [3, S. 182 Thm. 2.3], folgt dies bereits, wenn φ irreduzibel ist. Es soll Induktion über n verwendet werden.
   Das Polynom $x^2 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$, da es keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt. Da φ ein Grad 2 Polynom in dem Polynomring mit Koeffizienten in $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ ist, ist die einzig mögliche Zerlegung durch $\varphi = (x_n + c)(x_n - c)$ mit $c \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ gegeben. Damit ist aber $c^2 = 1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$ und mit der Induktionsvoraussetzung entsteht ein Widerspruch.

2. Da

$$[-1] = [x_1^2 + \ldots + x_n^2]$$

   in $A_{n,\mathbb{R}}$ gilt, kann $s(A_{n,\mathbb{R}}) \leq n$ abgeleitet werden.
   Sei umgekehrt A eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Stufe n (z.B. die $\mathbb{R}$-Algebra $A_{S^{n-1},-}$ aus Theorem 3.15) und $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = -1 \in A.$$

   Definiere durch die universelle Eigenschaft des Polynomrings die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow A \\ x_i &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

   Die Eigenschaft $1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 \in \ker(f)$ liefert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A_{n,\mathbb{R}} \to A$. Bemerkung 2.3 impliziert $s(A_{n,\mathbb{R}}) \geq s(A) = n$.

□

4. Die Verallgemeinerung auf formal reelle Körper

Dieses Kapitel hat das Ziel, die erste wichtige Verallgemeinerung des Theorems 2.14 zu erreichen. Am Ende werden wir wissen, dass für jeden formal reellen Körper K die Stufe von

$$A_{n,K} := K[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

genau n beträgt. Dies soll als eines der wichtigsten Ergebnisse aus dieser Arbeit hervorgehen. Dafür benötigen wir einige Kenntnisse über formal reelle Körper, geordnete Körper und dessen Zusammenhänge. Für die Theorie geordneter Körper orientieren wir uns hauptsächlich an [3, Ch. XI].

4.1. Geordnete Körper

Eine zentrale Rolle spielt die Definition des *geordneten Körpers*. Wir werden sehen, dass ein Körper genau dann formal reell ist, wenn eine Ordnung auf ihm existiert.

Definition 4.1 (geordnete Körper) Ein Körper K ist *geordnet durch* eine Teilmenge $P \subset K$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

ORD1 K ist die disjunkte Vereinigung von P, $-P := \{-x \mid x \in P\}$ und $\{0\}$.

ORD2 P ist multiplikativ und additiv, d.h. falls $x, y \in P$, so ist auch $x + y \in P$ und $xy \in P$.

Man nennt P auch die Menge der positiven Elemente in K.

Proposition 4.2 (Eigenschaften von geordneten Körpern) Sei K ein geordneter Körper und P die dazugehörige Menge der positiven Elemente. Die Ordnung hat die Eigenschaften

- $1 \in P$,
- K ist formal reell und insbesondere $\mathrm{char}(K) > 0$ und
- $x \in P$ impliziert $x^{-1} \in P$.

Beweis. Es gilt wegen ORD1 entweder $1 \in P$ oder $-1 \in P$. Falls $-1 \in P$, so ist wegen ORD2 auch $(-1)^2 = 1 \in P$. Widerspruch. Dies beweist die erste Aussage.
Mit demselben Argument zeigt man für jedes $x \in K \setminus \{0\}$, dass $x^2 \in P$ gilt. ORD2 impliziert, dass Quadratsummen immer in P liegen und wegen der ersten Eigenschaft nie -1 ergeben. Wäre des Weiteren $x \in P$ und $x^{-1} \notin P$, so gilt $-x^{-1} \in P$ und deshalb $-1 = x \cdot (-x^{-1}) \in P$. Dies wurde oben ausgeschlossen. $\square$

Bemerkung 4.3 Ist K ein geordneter Körper, so definiert die Relation

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P \cup \{0\}$$

im üblichen Sinne eine totale Ordnungsrelation auf K, die mit den Körperaxiomen verträglich ist. Das heißt:

- Die Ungleichung $a \leq b$ impliziert $a + c \leq b + c$.
- Ist $a \leq b$ und $c \geq 0$, so gilt auch $ac \leq bc$.

Diese Eigenschaften sind leicht zu überprüfen.

Beispiel 4.4 Aus den obigen Eigenschaften für geordnete Körper folgt sofort, dass auf $\mathbb{Q}$ genau eine Ordnung existiert. Das ist die übliche Ordnung auf $\mathbb{Q}$.

Lemma 4.5 Sei K ein formal reeller Körper. Falls $a \in K$, so ist $K(\sqrt{a})$ oder $K(\sqrt{-a})$ formal reell.

Beweis. Falls $\sqrt{a} \in K$ oder $\sqrt{-a} \in K$ gilt, ist die Aussage trivial. Sei also $\sqrt{a}, \sqrt{-a} \notin K$ gefordert. Wir bemerken, dass das Produkt zweier Quadratsummen wieder eine Quadratsumme ist[11].
Angenommen $K(\sqrt{a})$ ist nichtreell, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$ mit

$$-1 = \sum_i (a_i + \sqrt{a} b_i)^2 = \sum_i a_i^2 + \sum_i 2a_i b_i \sqrt{a} + a \sum_i b_i^2.$$

Da die Körpererweiterung $K \subset K(\sqrt{a})$ den Grad 2 hat, folgt unmittelbar

$$-1 = \sum_i a_i^2 + a \sum_i b_i^2. \tag{10}$$

Ist a eine Summe von Quadraten in K, so beweist Gleichung 10 und die Bemerkung am Anfang des Beweises, dass -1 eine Quadratsumme in K ist. Widerspruch. $K(\sqrt{a})$ ist formal reell.
Falls a keine Quadratsumme ist, so erreichen wir durch Umstellen von 10

$$-a = \frac{1 + \sum_i a_i^2}{\sum_i b_i^2} = \frac{(1 + \sum_i a_i^2) \sum_i b_i^2}{(\sum_i b_i^2)^2}.$$

Dabei gilt $\sum_i b_i^2 \neq 0$, da ansonsten -1 mit Gleichung 10 eine Quadratsumme in K ist. Erneut kann die Bemerkung am Anfang des Beweises verwendet werden, um zu zeigen, dass $-a$ eine Summe von Quadraten in K ist. Der Austausch von a mit $-a$ im Beweis ergibt, dass $K(\sqrt{-a})$ formal reell sein muss. □

[11] Dies kann durch elementares Ausmultiplizieren gesehen werden.

Definition 4.6 (reell abgeschlossen) Ein formal reeller Körper L heißt reell abgeschlossen, falls für jede algebraische Körpererweiterung $L \subset L'$, sodass L' formal reell ist, bereits $L' = L$ gilt.
Ein reeller Abschluss eines Körpers K ist eine algebraische Körpererweiterung $K \subset \hat{K}$, sodass $\hat{K}$ reell abgeschlossen ist.

Theorem 4.7 Sei K ein formal reeller Körper. Dann existiert ein reeller Abschluss von K. Falls R ein reell abgeschlossener Körper ist, so hat R eine eindeutige Ordnung, welche durch $P := R^2 \setminus \{0\} = \{x^2 \mid x \in R \setminus \{0\}\}$ gegeben ist.

Beweis. Für die Existenz des reellen Abschlusses, wollen wir das Lemma von Zorn anwenden (siehe B.1).
Wähle einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{P} = \{K' \mid K' \text{ ist eine algebraische und reelle Körpererweiterung von } K \text{ und } K' \subset \overline{K}\}$$

zusammen mit der Halbordnung „$\subset$“. Da $\mathcal{P}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\overline{K}$ ist, ist klar, dass $\mathcal{P}$ eine Menge ist[12]. Sei $T \subset \mathcal{P}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{P}$. Aufgrund von $K \in \mathcal{P}$, können wir $T \neq \emptyset$ annehmen. Definiere

$$L := \bigcup_{K' \in T} K'.$$

Wir wollen zeigen, dass L eine obere Schranke von T ist. Dies ist klar, falls $L \in \mathcal{P}$ gilt.

- L ist ein Körper: Für je zwei Elemente $x, y \in L$ existieren $K_1, K_2 \in T$ mit $x \in K_1$ und $y \in K_2$. Da T total geordnet ist, kann ohne Beschränkung $K_1 \subset K_2$ angenommen werden. Die Addition bzw. Multiplikation von x, y in L wird als die Addition bzw. Multiplikation von x, y in K_2 definiert. Es ist leicht zu überprüfen, dass L ein Körper ist.

- L ist algebraisch über K: Jedes $x \in L$ kann als Element eines über K algebraischen Körpers gesehen werden. Deshalb ist x algebraisch über K.

- L ist reell: Falls $-1 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ in L gilt, so gibt es für $i = 1, \ldots, n$ Körper $K_i \in T$, sodass $x_i \in K_i$. Aufgrund der totalen Ordnung auf T existiert das Maximum der K_i. Das heißt, dass es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $K_j \subset K_i$ für $j = 1, \ldots, n$. Für jedes j folgern wir $x_j \in K_i$, was einen Widerspruch darstellt, da K_i nach Voraussetzung formal reell ist.

Das Lemma von Zorn impliziert die Existenz eines maximalen Elements $\hat{K}$ in $\mathcal{P}$. Dieses ist ein reeller Abschluss von K.

[12] Dies ist zwingend notwendig für das Lemma von Zorn.

Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Wir wollen zeigen, dass durch $P := R^2 \setminus \{0\}$ eindeutig eine Ordnung auf R definiert wird. Wähle ein beliebiges $a \in P$. Angenommen $-a$ wäre ein Element von P, dann ist $-1 = \frac{a}{-a}$ ein Quadrat. Dies ist nicht möglich, da R formal reell ist. Nun sind zumindest $P, \{0\}$ und $-P$ disjunkt. Sei $a \in K \setminus \{0\}$. Wir können durch das Lemma 4.5 folgern, dass $\sqrt{a} \in R$ oder $\sqrt{-a} \in R$. Dies bedeutet $a \in P$ oder $a \in -P$. Die Additivität und Multiplikativität von P kann leicht eingesehen werden. Die Menge P definiert also tatsächlich eine Ordnung auf R.
Die Ordnung P ist eindeutig, denn ist P' eine weitere wohldefinierte Menge von positiven Zahlen in R, so ist aufgrund obiger Eigenschaften $P = R^2 \subset P'$. Da aber $R = P \sqcup -P \sqcup \{0\} = P' \sqcup -P' \sqcup \{0\}$ gilt[13], müssen P und P' bereits übereinstimmen. $\square$

Korollar 4.8 Jeder formal reelle Körper K besitzt eine Ordnung.

Beweis. Sei $\hat{K}$ ein reeller Abschluss von K und $P \subset \hat{K}$ die dazugehörige eindeutige Ordnung. Die Menge $K \cap P$ definiert eine Ordnung auf K. $\square$

Bemerkung 4.9 Im Allgemeinen ist der reelle Abschluss eines formal reellen Körpers K nicht eindeutig. Ebenso können verschiedene Ordnungen auf K existieren.

Beispiel 4.10 Es existiert ein reeller Abschluss $\hat{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$, der als Teilmenge von $\mathbb{R}$ aufgefasst werden kann.

Beweis. Sei $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$ und $R := \mathbb{R} \cap \bar{\mathbb{Q}}$. Nun ist bekannterweise R ein Körper und R ist algebraisch über $\mathbb{Q}$. Zudem ist R ein formal reeller Körper, da er Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Wähle einen reellen Abschluss $\hat{\mathbb{Q}} \subset \bar{\mathbb{Q}}$ von R. Da die Eigenschaft algebraisch zu sein transitiv ist, ist $\hat{\mathbb{Q}}$ ein reeller Abschluss von $\mathbb{Q}$.
Angenommen es gäbe $x = a + ib \in \hat{\mathbb{Q}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Das Element x ist algebraisch über $\mathbb{Q}$. Folglich ist $\bar{x} = a - ib \in \bar{\mathbb{Q}}$ und somit ist sowohl $a = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ als auch $b = \frac{x-a}{i}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Es folgt $a, b \in \mathbb{R} \cap \bar{\mathbb{Q}} \subset \hat{\mathbb{Q}}$. Damit ist $i \in \hat{\mathbb{Q}}$, was einen Widerspruch darstellt, da $\hat{\mathbb{Q}}$ nach Definition formal reell ist. Es gilt folglich $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \bar{\mathbb{Q}}$. $\square$

Es kann sogar gezeigt werden, dass zu einem geordneten Körper ein bis auf Isomorphie eindeutiger reeller Abschluss existiert, der die Ordnung erhält [2, S. 455 f, Thm. 2.9 und Thm. 2.11]. Daher ist $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \bar{\mathbb{Q}}$ bis auf Isomorphie der einzige reelle Abschluss von $\mathbb{Q}$. Für diese Arbeit wird nur die Existenz eines reellen Abschlusses $\hat{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ relevant sein.

[13] Dabei steht $\sqcup$ für die disjunkte Vereinigung.

4.2. Artin-Lang-Homomorphiesatz

Wir wissen, wie die Stufe von Algebren mithilfe von Ringhomomorphismen abgeschätzt werden kann. Allerdings fehlt eine Möglichkeit, Homomorphismen von formal reellen Körpern nach $\mathbb{R}$ anzugeben. Eine zentrale Rolle wird folgende Version des Artin-Lang-Homomorphiesatzes spielen:

Theorem 4.11 (Artin-Lang-Homomorphiesatz) Sei k ein Körper und $K = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine endlich erzeugte geordnete Körpererweiterung von k. Des Weiteren sei R ein reeller Abschluss von k, sodass R die gleiche Ordnung auf k induziert, wie K. Dann gibt es einen Homomorphismus

$$\varphi : k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \longrightarrow R.$$

Beweis. Siehe [3, S. 457 Thm. 3.1]. □

4.3. Die Stufe von $A_{n,K}$

Theorem 4.12 Sei K ein formal reeller Körper und

$$A_{n,K} = K[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Die K-Algebra $A_{n,K}$ ist ein Integritätsring mit $s := s(A_{n,K}) = n$.

Beweis. Die Begründung, dass $A_{n,K}$ ein Integritätsring ist, funktioniert analog zu Theorem 2.14. Da

$$-1 = [x_1]^2 + \ldots + [x_n]^2$$

in $A_{n,K}$ gilt, ist $s(A_{n,K}) \leq n$.
Angenommen $s(A_{n,K})$ wäre kleiner als n. Folglich gibt es $f_1, \ldots, f_{n-1} \in K[x_1, \ldots, x_n]$, sodass

$$-1 = [f_1]^2 + \ldots + [f_{n-1}]^2 \in A_{n,K}. \tag{11}$$

Seien $r_1, \ldots, r_m \in K$ alle Koeffizienten der Polynome $f_1, \ldots, f_{n-1}$ und

$$\tilde{K} := \mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_m) \subset K$$

der über $\mathbb{Q}$ endlich erzeugte Unterkörper von K. Als Unterkörper eines formal reellen Körpers ist $\tilde{K}$ ebenfalls formal reell und besitzt nach Korollar 4.8 eine Ordnung. Wir bemerken, dass nach Beispiel 4.4 die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ eindeutig ist und deshalb sowohl $\tilde{K}$ als auch ein reeller Abschluss $\hat{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ dieselbe Ordnung auf $\mathbb{Q}$ induzieren. Die Anwendung des Artin-Lang-Homomorphiesatz 4.11 auf $k = \mathbb{Q}$ und $R = \hat{\mathbb{Q}}$ liefert einen Homomorphismus

$$\varphi : A := \mathbb{Q}[r_1, \ldots, r_m] \longrightarrow \hat{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}.$$

Betrachte den Ring $R_A := A[x_1, \ldots, x_n]/(1+x_1^2+\ldots+x_n^2)$. Es ist $[f_1], \ldots, [f_{n-1}] \in R_A$, weshalb die Gleichung 11 auch in R_A gilt und somit $s(R_A) \leq n-1$ ist. Durch φ und die Zuweisung $x_i \mapsto x_i$ kann ein Ringhomomorphismus $\psi : R_A \to A_{n,\mathbb{R}}$ definiert werden. Bemerkung 2.3 und Theorem 2.14 implizieren $n = s(A_{n,\mathbb{R}}) \leq s(R_A) \leq n-1$. Dies ist ein Widerspruch. □

Bemerkung 4.13 Interessant ist es auch den Quotientenkörper von $A_{n,K}$ zu betrachten. Dieser ist durch

$$L := \mathrm{Quot}(A_{n,K}) = K(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sqrt{(-(1+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)})$$

gegeben. Durch Ergänzung einer unbestimmten Variable y erhalten wir

$$\begin{aligned} L(y) &\cong K(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, y\sqrt{(-(1+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)}) \\ &= K(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, \sqrt{(-(y^2+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)}), \end{aligned}$$

was genau dem Körper aus Theorem 2.8 entspricht. Beispiel 2.7 impliziert $s(L) = s(L(y))$. Die Stufe von L ist also die größte Zweierpotenz kleiner gleich n. Diese Konstruktion ist auch in [5] als Punkt (3) im Beweis von Theorem 2.3 auf Seite 44 zu finden.

5. Weitere Verallgemeinerungen

Nun ist die Grundlage geschaffen, die letzten Verallgemeinerungen der Theoreme 2.14 und 4.12 zu beweisen. Ziel ist es zu zeigen, dass genannte Aussagen auch für Ringe R mit Stufe $s(R) = \infty$ gelten.
Dazu wird in zwei Schritten ein Ringhomomorphismus von einem Ring mit Stufe ∞ zu einem formal reellen Körper konstruiert. Im ersten Schritt ist das Ziel einen Ringhomomorphismus in einen Ring $\hat{R}$ anzugeben, in dem die 0 nur trivial als Quadratsumme geschrieben werden kann.

5.1. Der erste Schritt

Im Folgenden sei R ein Ring mit Stufe $s(R) = \infty$.
Durch eine Konstruktion mithilfe eines Quotienten von R wird ein Ring $\hat{R}$ angegeben, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \in \hat{R} \text{ bereits } a_i = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \text{ impliziert.}$$

Zunächst interessieren wir uns für ein Ideal, welches alle „problematischen“ Elemente enthält.

Lemma 5.1 Es ist

$$I_R := \{x \in R \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ und } x_1, \ldots, x_k \in R \text{ mit } 0 = x^2 + \sum_i x_i^2\}$$

ein Ideal von R mit $I_R \neq R$.

Beweis. Seien $x, y \in I_R$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ passende Elemente in R mit der Eigenschaft

$$0 = x^2 + \sum_i x_i^2 = y^2 + \sum_i y_i^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &+ (x-y)^2 + 2\sum_i x_i^2 + 2\sum_i y_i^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2\sum_i x_i^2 + 2\sum_i y_i^2 = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Es folgt $x + y \in I_R$.
Ist $r \in R$ und $x \in I_R$, so wähle $x_1, \ldots, x_k$ wie oben und folgere

$$(rx)^2 + \sum_i (rx_i)^2 = r^2(x^2 + \sum_i x_i^2) = 0.$$

Dies impliziert $rx \in I_R$.
Offenbar ist $0 \in I_R$, weshalb $I_R \neq \emptyset$. Die Menge I_R ist folglich ein Ideal.
Angenommen $1 \in I_R$, dann gäbe es $x_1, \ldots, x_k \in R$ mit

$$0 = 1^2 + \sum_{i=1}^{k} x_i^2.$$

Also wäre die Stufe von R kleiner oder gleich k, was einen Widerspruch zu $s(R) = \infty$ darstellt. □

Satz 5.2 Im Ring $\hat{R} := R/\sqrt{I_R}$, kann die 0 nur trivial als Quadratsumme geschrieben werden. Dabei ist $\sqrt{I_R}$ das Radikal von I_R.

Beweis. Angenommen es gibt $x_1, \ldots, x_n \in R \setminus \sqrt{I_R}$ mit $[x_1]^2 + \ldots + [x_n]^2 = 0$ in $\hat{R}$. Wählen wir $k \in \mathbb{N}$ groß genug, so ist

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k \in I_R.$$

Das heißt es existieren $z_1, \ldots, z_m \in R$ mit

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{2k} + \sum_i z_i^2 = 0.$$

Nun ist $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{2k}$ eine Quadratsumme, wobei ein Summand $(x_1^{2k})^2$ entspricht[14]. Folglich ist $x_1^{2k} \in I_R$, was bedeutet, dass $x_1 \in \sqrt{I_R}$. Daher ist $[x_1] = 0$ in $\hat{R}$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme. □

[14] Dies kann beispielsweise durch Ausmultiplizieren gezeigt werden.

Korollar 5.3 Die kanonische Abbildung $R \to \hat{R}$ ist eine Abbildung von einem Ring mit Stufe ∞ zu einem Ring, in dem die 0 nur trivial als Quadratsumme geschrieben werden kann.

5.2. Der zweite Schritt

Sei im Folgenden $\hat{R}$ ein Ring, in dem die Null nur trivial als Quadratsumme dargestellt werden kann, d.h. $\sum_i a_i^2 = 0$ impliziert $a_i = 0$ für alle i. Des Weiteren definiere $S := \{x \in \hat{R} \mid x \text{ ist kein Nullteiler}\}$ mit der Konvention, dass 0 ein Nullteiler ist. Wir konstruieren einen Ringhomomorphismus

$$\hat{R} \longrightarrow K$$

in einen formal reellen Körper K.

Lemma 5.4 S ist eine multiplikative Teilmenge von $\hat{R}$.

Beweis. Offenbar gilt $1 \in S$. Angenommen ab ist ein Nullteiler für $a, b \in S$, dann gibt es $c \in \hat{R} \setminus \{0\}$, sodass $0 = (ab)c = a(bc)$. Es ist aber $bc \neq 0$, da b kein Nullteiler ist und deshalb ist a ein Nullteiler. Widerspruch. □

Dies gibt uns die Möglichkeit zu lokalisieren:

Lemma 5.5 Definiere $\hat{R}_S := S^{-1}\hat{R}$ als die Lokalisierung von $\hat{R}$ an S. In $\hat{R}_S$ kann 0 nur trivial als Quadratsumme dargestellt werden.

Beweis. Sei angemerkt, dass die kanonische Abbildung $\hat{R} \to \hat{R}_S$ injektiv ist, weil S keine Nullteiler enthält. Angenommen es gibt $a_1, \ldots, a_n \in R$ und $b_1, \ldots, b_n \in S$ mit

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 0. \tag{12}$$

Dann ist

$$0 = \left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2\right) \prod_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(a_1 \prod_{i \neq 1} b_i\right)^2 + \ldots + \left(a_n \prod_{i \neq n} b_i\right)^2$$

eine Quadratsumme in $\hat{R}$. Somit ist für $i = 1, \ldots, n$, da in $\hat{R}$ die 0 nur eine triviale Quadratsumme sein kann, die Gleichung

$$a_i \prod_{j \neq i} b_j = 0$$

erfüllt. Weil kein b_j ein Nullteiler ist, folgt $a_i = 0$ für jedes i. Die Quadratsumme in Gleichung 12 war bereits trivial. □

Satz 5.6 Sei $m \subset \hat{R}_S$ ein maximales Ideal[15]. Der Körper $K = \hat{R}_S/m$ ist formal reell.

Beweis. Angenommen es gibt $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$[x_1]^2 + \ldots + [x_n]^2 = [-1] \in K.$$

Folglich existiert ein $x \in m$ mit

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1 + x \in \hat{R}_S. \tag{13}$$

Sei bemerkt, dass x ein Nullteiler sein muss, denn ansonsten wäre nach Konstruktion von S das Element x eine Einheit. Also gibt es ein $c \in \hat{R}_S \setminus \{0\}$ mit $cx = 0$. Multipliziert man Gleichung 13 mit c^2, so erhält man

$$(cx_1)^2 + \ldots + (cx_n)^2 + c^2 = xc^2 = 0.$$

Da $c \neq 0$ gilt, ist dies eine nichttriviale Quadratsumme, die die Null darstellt. Ein Widerspruch zu Lemma 5.5. □

Es folgt die gewünschte Aussage:

Korollar 5.7 Sei R ein Ring mit Stufe $s(R) = \infty$. Wir erhalten einen Ringhomomorphismus

$$\varphi : R \longrightarrow K$$

in einen formal reellen Körper K.

Beweis. Definiere φ als die Verknüpfung der Abbildung $R \to \hat{R}$ aus Korollar 5.3 und den kanonischen Abbildungen $\hat{R} \to \hat{R}_S \to \hat{R}_S/m$ mit der Notation aus Satz 5.6 und Lemma 5.5. □

Das in dieser Arbeit erzielte Theorem kann nun bewiesen werden:

Theorem 5.8 Sei R ein Ring mit Stufe $s(R) = \infty$. Dann hat für alle $n \in \mathbb{N}$ die R-Algebra

$$A_{n,R} := R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

die Stufe $s(A_{n,R}) = n$.

Beweis. Wie in Theorem 2.14 ist „$\leq$" trivial.
Wähle nach Korollar 5.7 einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to K$ in einen formal reellen Körper K. Dieser induziert durch die Zuweisung $x_i \mapsto x_i$ einen R-Algebrenhomomorphismus

$$R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) = A_{n,R} \longrightarrow A_{n,K} = K[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Eine Anwendung von Bemerkung 2.3 zusammen mit Theorem 4.12 ergibt $s(A_{n,R}) \geq s(A_{n,K}) = n$ □

[15] Die Existenz begründet sich mit dem Lemma von Zorn.

6. Ausblick: Die Stufe von Algebren über nichtreellen Körpern

Es wurde die Stufe der R-Algebra $R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ für alle Ringe mit $s(R) = \infty$ untersucht. Welchen Einfluss haben jedoch Ringe mit Stufe $< \infty$? Für Ringe mit „kleiner" Stufe kann diese Frage direkt beantwortet werden:

Satz 6.1 Sei R ein Ring mit endlicher Stufe und $n \in \mathbb{N}$, sodass $s(R) \leq n$. Die Stufe von $A_{n,R}$ erfüllt die Gleichung

$$s(A_{n,R}) = s(R).$$

Beweis. Seien $e_1, \ldots, e_n \in R$, sodass $e_1^2 + \ldots + e_n^2 = -1$. Die Zuweisung $x_i \mapsto e_i$ induziert einen R-Algebrenhomomorphismus

$$R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \to R.$$

Bemerkung 2.3 liefert die Ungleichung $s\left(A_{n,R}\right) \geq s(R)$. Durch die kanonische Abbildung $R \to A_{n,R}$ und erneut Bemerkung 2.3 folgt $s(A_{n,R}) \leq s(R)$. □

In dieser Arbeit bleibt folgende Frage offen:

Was ist die Stufe von $R[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$, falls $s(R) > n$?

Allerdings sei folgende Anwendung von Kapitel 1 bemerkt:

Korollar 6.2 Sei K ein Körper und $n = 2^k$ eine Zweierpotenz mit $n \leq s(K)$. Dann ist

$$s(A_{n,K}) = s(K[x_1, \ldots, x_n]/(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)) = n.$$

Beweis. Die Ungleichung „$\leq$" ist wieder klar. In den Fällen $s(K) = \infty$ und $n = s(K)$ ist dies Theorem 4.12 bzw. Satz 6.1.
Wir nehmen $s(K) > n$ an. Durch Theorem 2.8 zusammen mit der anschließenden Bemerkung wissen wir, dass der Körper

$$L := K(x_1, \ldots, x_n)(\sqrt{-(x_1^2 + \ldots + x_n^2)})$$

die Stufe n hat. Erkläre $\varphi : K \to L$ als die kanonische Abbildung. Wie in Theorem 5.8 induziert dies eine Abbildung $A_{n,K} \to A_{n,L}$. Bemerkung 2.3 impliziert $s(A_{n,K}) \geq s(A_{n,L})$. Doch nach Satz 6.1 gilt $s(A_{n,L}) = n$, was die Aussage beweist. □

Die Beweisidee des Korollars bietet noch mehr:

Proposition 6.3 Für einen gegebenen Ring R und eine natürlichen Zahl $n \leq s(R)$ existiert eine R-Algebra mit Stufe n genau dann, wenn $s(A_{n,R}) = n$ gilt.

Beweis. Falls es eine R-Algebra A mit Stufe $s(A) = n$ gibt, so nimmt diese zusammen mit der kanonischen Abbildung $R \to A$ den Platz des Körpers L im Beweis von 6.2 ein. Die umgekehrte Implikation ist klar. □

Ob diese Bedingung für alle Ringe zutrifft, ist unklar. Viele der in der Arbeit verwendete Strategien benötigen Stufe ∞, um Abbildungen nach $\mathbb{R}$ zu konstruieren. Allerdings ist es ist unmöglich, einen Ringhomomorphismus von einem Ring der Stufe $< \infty$ in einen Ring mit Stufe ∞ anzugeben.

Literatur

[1] J. W. S. Cassels. On the representation of rational functions as sums of squares. *Acta Arithmetica*, 1964.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[3] Serge Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002. Revised third edition.

[4] Albrecht Pfister. Zur Darstellung von —1 als Summe von Quadraten in einem Körper. *J. London Math. Soc.*, 1965.

[5] Albrecht Pfister. *Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology*. Cambridge University Press, 1995.

[6] J.-P Serre. *A Course in Arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1973.

A. Notationen

A.1. Symbole

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen einschließlich 0
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{Z}_2$	Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
S^n	Die n-dimensionale Sphäre $\subset \mathbb{R}^{n+1}$
$\mathbb{R}P^n$	Der n-dimensionale projektive Raum $S^n/\sim$: Mit : $x \sim y \Leftrightarrow x = -y$ für $x, y \in S^n$
Δ^n	Der n-dimensionale Simplex
$\{\pm 1\}$	Die Gruppe mit Elementen 1 und -1 und üblicher Multiplikation

A.2. Kategorien

Kategorie	Erklärung
$RING$	Kategorie der Ringe: Objekte: Ringe Morphismen: Ringhomomorphismen
$\mathbb{R}ALG$	Kategorie der $\mathbb{R}$-Algebren: Objekte: $\mathbb{R}$-Algebren Morphismen: $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$	Kategorie induziert durch $\leq$: Objekte: $\mathbb{N}$ Morphismen: Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{Hom}_{(\mathbb{N},\leq)}(n,m) = \begin{cases} \{*\} & \text{falls } n \leq m \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$ Mit der Konvention $n \leq \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$TOPI$	Kategorie der topologischen Räume mit Involution Objekte: Tupel (X, i) mit X ein topologischer Raum und i eine Involution auf X Morphismen: stetige äquivariante Abbildungen

B. Aussagen und Beweise

B.1. Das Lemma von Zorn

Theorem B.1 (Lemma von Zorn) Sei $(P, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Dann enthält P ein maximales Element.

B.2. Topologische Definitionen und Aussagen

B.2.1. Überdeckungen

Für dieses Kapitel sei die Referenz [2, S.56 Chapter 1.3] gegeben.

Definitionen B.2 Seien B, E topologische Räume und $p : E \to B$ eine stetige Abbildung.

- p heißt *Überdeckung* von B, falls für jeden Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung U von b und eine Menge F (ausgestattet mit der diskreten Topologie) existiert, sodass $p^{-1}(U)$ homeomorph zu $F \times U$ (ausgestattet mit der Produkttopologie) ist und das Diagramm
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & F \times U \arrow[dl, "pr_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
kommutiert.
- p ist eine zweiseitige Überdeckung, falls $F \cong \{1, 2\}$ als Menge.

Definition B.3 Ein topologischer Raum heißt einfach-(weg)zusammenhängend, falls er wegzusammenhängend ist und die Fundamentalgruppe trivial ist. Für eine Definition der Fundamentalgruppe siehe [2, Chapter 1].

Wir benutzen folgende (abgeschwächte) Version des Liftingkriteriums:

Satz B.4 (Liftingkriterium für Überdeckungen) Seien X, B, E topologische Räume, X einfach-zusammenhängend, zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend[16]. Sei zudem $p : E \to B$ eine Überdeckung und $f : X \to B$ eine stetige Abbildung. Des Weiteren seien $e \in E$ und $x \in X$, sodass $f(x) = p(e)$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{f} : X \to E$, sodass $\tilde{f}(x) = e$ und folgendes Diagramm kommutiert:
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ein solches $\tilde{f}$ nennen wir *Lift* von f.

[16] D.h. es gibt beliebig „kleine“ wegzusammenhängende Umgebungen eines jeden Punktes.

Beweis. Dieser Satz kann leicht mit den Propositionen 1.33 und 1.34 auf Seite 61 und 62 im Buch von Allen Hatcher [2] abgeleitet werden. □

Bemerkung B.5 Nehmen wir in Notation von Satz B.4 an, dass p eine zweiseitige Überdeckung ist. Dann gibt es für festgesetztes $b \in \operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(p)$ genau zwei (verschiedene) Elemente $e_1, e_2 \in E$ mit $p(e_1) = p(e_2) = b$. Ist $\operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(p) \neq \emptyset$, so gibt es genau zwei Lifts von f. Diese sind nun unabhängig von den Wahlen von x und e in Satz B.4.

B.2.2. Die n-dimensionalen topologischen Simplizes Δ^n

Ein wichtiges Hilfsmittel um einen Zusammenhang zwischen topologischen Räumen und der Definition von den Homologiegruppen B.2.4 herzustellen sind die n-dimensionalen topologischen Simplizes Δ^n:

Definition B.6 Für ein $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\Delta^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 1 \ ; \ x_i \geq 0\}.$$

Die Topologie auf Δ^n sei durch die Topologie auf $\mathbb{R}^n$ gegeben. Zudem gibt es für jedes n und $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine (stetige) Inklusionsabbildung:

$$\begin{aligned} \delta_{i,n} \colon \Delta^{n-1} &\hookrightarrow \Delta^n \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) &\mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Falls klar ist, was n ist, schreiben wir auch δ_i statt $\delta_{i,n}$. Die n-dimensionalen topologischen Simplizes Δ^n sind einfach-zusammenhängend, zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Siehe auch [2, Chapter 2.1] als Referenz.

B.2.3. Kettenkomplexe

In diesem Unterkapitel soll kurz der Begriff *Kettenkomplex* wiederholt werden.

Definition B.7 Ein *Kettenkomplex* (von abelschen Gruppen) ist eine Familie $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen zusammen mit Abbildungen $d_n : G_n \to G_{n-1}$, sodass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Für diesen Kettenkomplex schreibt man auch C_*
Des Weiteren definieren wir die n-te Homologiegruppe von C_* als

$$H_n(C_*) = \ker(d_n) / \operatorname{im}(d_{n+1}).$$

Dies ist wohldefiniert aufgrund der Bedingung $\operatorname{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n)$

Definition B.8 Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow C_* \longrightarrow D_* \longrightarrow E_* \longrightarrow 0$$

besteht aus kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow D_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, sodass diese verträglich mit den Abbildungen d_n sind.

Proposition B.9 Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{\tau} D_* \xrightarrow{p_*} E_* \longrightarrow 0$$

induziert eine natürliche lange exakte Sequenz in den Homologiegruppen, die gegeben ist durch

$$\cdots \longrightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{\tau} H_n(D_*) \xrightarrow{p_*} H_n(E_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C_*) \longrightarrow \cdots,$$

wobei δ ein Gruppenhomomophismus ist.

Beweis. Siehe [2, S. 117 Thm. 2.16] □

B.2.4. Singuläre Homologie

Sei X ein topologischer Raum. Wir wollen nun mit den Konstruktionen aus B.2.2 einen Kettenkomplex konstruieren, der auf X basiert.
Sei dazu $\mathrm{Sing}_n(X) = \mathrm{Hom}_{Top}(\Delta^n, X)$ die Menge der stetigen Abbildungen von dem n-dimensionalen Simplex in den Raum X.
Des Weiteren definiere für eine abelsche Gruppe A

$$C_n(X, A) := \mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_n(X)] \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

wobei $\mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_n(X)] \colon = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Sing}_n[X]} \mathbb{Z}$ die über $\mathrm{Sing}_n(X)$ frei erzeugte abelsche Gruppe ist. Diese stellen bereits die abelschen Gruppen für unseren Kettenkomplex dar. Definiere nun nur für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_n : C_n(X, A) &\longrightarrow C_{n-1}(X, A) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_{i,n}. \end{aligned}$$

Nun erhalten wir einen Kettenkomplex

$$C_n(X, A) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X, A) \xrightarrow{d_1} C_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Dass dies tatsächlich einen Kettenkomplex darstellt, kann in [2, S. 108 f.] nachgelesen werden. Zuletzt definiere $H_n(X, A)$ als die n-te Homologiegruppe des obigen Kettenkomplexes.
Diese Homologiegruppen haben einige Eigenschaften, die wir ohne Beweise wiederholen wollen. Ein Verweis hierzu ist [2, Ch. 2].

Proposition B.10 (Homotopieinvarianz der Homologiegruppen) Sind X und Y zwei zueinander homotope topologische Räume, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n(X, A) \cong H_n(Y, A)$$

Beweis. Siehe [2, S. 111 Cor. 2.11] und die Verallgemeinerung „Homology with Coefficients“ in [2, S. 153] □

Theorem B.11 (Die Homologiegruppen der Sphäre) Für die n-dimensoionale Sphäre S^n und eine abelsche Gruppe A gilt

$$H_k(S^n, A) \cong \begin{cases} A & \text{falls } k = 0, n. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Dies ist [2, S. 114 2.14] zusammen mit der Verallgemeinerung „Homology with Coefficients“ in [2, S. 153]. □

Lemma B.12 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe Falls $f\colon S^k \to S^k$ eine stetige Abbildung mit Grad n ist, so ist die induzierte Abbildung $f_* : H_n(S^k, G) \to H_n(S^k, G)$ die Multiplikation mit n, also $f_*(x) = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$.

Beweis. [2, S.154, Lemma 2.49] □

Satz B.13 Sei $X \neq \emptyset$ ein wegzusammenhängendner Raum und A eine abelsche Gruppe. Dann gilt

$$H_0(X, A) \cong A.$$

Beweis. Wir betrachen den relevanten Teil des Kettenkomplexes für X, der durch

$$\cdots \longrightarrow C_1(X, A) \xrightarrow{d_1} C_0(X, A) \longrightarrow 0$$

gegeben ist. Es ist $C_0(X, A)/\operatorname{im}(d_1) \cong A$ zu zeigen. Die stetigen Abbildung $\sigma : \Delta^1 \cong [0, 1] \to X$ sind genau alle Wege[17] in X. Die stetigen Abbildungen $\tau : \Delta^0 = \{1\} \to X$ sind durch die Elemente von X gegegben[18]. Die Abbildung d_1 schickt ein σ genau auf die Differenz von Anfangs- und Endpunkt[19]. Für ein festes $x \in X$ liegt daher die Abbildung $\tau : \{1\} \to X$ mit $\tau(1) := x$ nicht im Bild von d_1 (und somit auch $g\tau \notin \operatorname{im}(d_1)$ für ein $g \in A$). Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus

[17] Also stetige Abbildungen $[0, 1] \to X$

[18] Durch die eindeutige Identifizierung von τ durch $\tau(1)$

[19] Also auf $\sigma(0) - \sigma(1)$

$\varphi : A \hookrightarrow H_0(X, A)$ gegeben durch $g \mapsto g\tau$. Wir müssen nur noch Surjektivität zeigen. Sei $\tilde{\tau}(1) = y$ mit $y \in X$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg σ von y nach x. Damit ist $\tilde{\tau} - \tau \in \mathrm{im}(d_1)$ und folglich gilt

$$[\tau] = [\tau] + [\tilde{\tau}] - [\tau] = [\tilde{\tau}]$$

in $H_0(X, A)$, was die Surjektivität beweist. □

Bemerkung B.14 Mit wenigen Ergänzungen im Beweis von B.13 lässt sich zeigen, dass für einen beliebigen topologischen Raum X die Homologiegruppe $H_0(X, A)$ isomorph zu $\bigoplus_{\pi_0(X)} A$ ist. Hierbei beschreibt $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten.

Satz B.15 (Mayer-Vietoris Sequenz) Ist X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$, sodass $X = A^\circ \cup B^\circ$ gilt[20], so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots.$$

Beweis. Siehe zum Beispiel [2, S. 149]. □

B.2.5. Der reelle projektive Raum

Ein Hilfsmittel um die Homologie von Sphären zu untersuchen, wird für uns der *reelle projektive Raum* sein (siehe auch [2, S.6 Example 0.4]). Dazu statten wir die n-dimensionale Sphäre S^n mit der Äquivalenzrelation $\sim$ aus, die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = -y$$

definiert wird. Erkläre

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \sim$$

ausgestattet mit der Quotiententopologie[21]. Die kanonische Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ bildet eine zweiseitige Überdeckung.

Beispiel B.16 Es gilt nach Satz B.13, dass $H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Dieses Resultat wird in den Satz von Borsuk-Ulam 3.4 einfließen.

Bemerkung B.17 Nach dem Beweis vom Satz von Borsuk-Ulam 3.4 werden wir sogar wissen, dass $H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ für $k \leq n$ gilt.

[20] Dabei ist A° (bzw. B°) das Innere von A (bzw. B).

[21] Also die „kleinste "Topologie auf $\mathbb{R}P^n$, sodass die kanonische Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ stetig ist.

Lemma B.18 Für $k > n$ gilt

$$H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen dies induktiv über n. Für $n = 1$ ist bekannterweise $\mathbb{R}P^n \cong S^n$ und somit folgt die Aussage.
Ist nun $n > 1$ und $k > n$, so definiere $U := p(\hat{U})$, wobei $\hat{U} := \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n > 0\}$ und $V = p(\hat{V})$ mit $\hat{V} := \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid |x_n| < \epsilon\}$ für ein kleines $\epsilon > 0$. Es ist leicht zu überprüfen, dass U und V offen in $\mathbb{R}P^n$ sind und dass $U \cup V = \mathbb{R}P^n$ gilt. Offensichtlich gilt $U \cong \hat{U}$ und $U \cap V \cong \hat{U} \cap \hat{V}$. Des Weiteren ist $\hat{U}$ zusammenziehbar (zum Nordpol von S^n) und $\hat{U} \cap \hat{V}$ ist homotop zu $\{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n = \frac{1}{2}\epsilon\} \cong S^{n-1}$. Ebenso ist leicht zu sehen, dass V homotop zu $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist.
Zusammenfassend ist U zusammenziehbar, V homotop zu $\mathbb{R}P^{n-1}$ und $U \cap V$ ist homotop zu einem zu S^{n-1} isomorphen Raum.
Mit dem Satz von Mayer-Vietoris erhalten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_k(U, \mathbb{Z}_2)}_{=0} \oplus \underbrace{H_k(V, \mathbb{Z}_2)}_{=0 \text{ nach IV}} \longrightarrow H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \underbrace{H_{k-1}(U \cap V, \mathbb{Z}_2)}_{=0} \longrightarrow \cdots.$$

Aufgrund der Exaktheit muss $H_k(\mathbb{R}P^n) = 0$ gelten. Die Induktion liefert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Selbstständigkeitserklärung

Ich habe die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Außerdem bestätige ich hiermit, dass die vorgelegten Druckexemplare und die vorgelegte elektronische Version der Arbeit identisch sind und dass ich von den in § 27 Abs. 6 vorgesehenen Rechtsfolgen Kenntnis habe.

Regensburg, den 01. September 2021

Lukas Krinner
Matrikelnummer 2089452