elementare Integrierbarkeit - Satz von Liouville

Tobias Hirsch

QED-Seminar Bayreuth 2023

Einleitung

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung hat jede stetige reelle Funktion eine Stammfunktion. Allerdings ist der Beweis nicht konstruktiv – dies wirft natürlich die Frage auf für welche Funktionen man eine Stammfunktion „konkret hinschreiben“ kann. Damit ist gemeint, dass sich die Stammfunktion eine elementare Funktion ist. Üblicherweise fallen unter diesen Begriff

- gebrochen rationale Funktionen (Konstanten, Potenzfunktionen, ...) und beliebig hohe Wurzelfunktionen
- die Exponential- und Logarithmusfunktionen
- trigonometrische und hyperbolische Funktionen $(\sin, \cos, \tan, \ldots \sinh, \cosh, \ldots)$ und deren Umkehrung

und Funktionen die sich aus dieser Liste durch endliche Addition, Subtraktion, Multiplikation, Differenzen oder Verkettung erzeugen lassen. Die Auswahl genau dieser Funktionen hat vor allem historische Gründe. Dies macht den Begriff der elementaren Funktion allerdings mathematisch schwer fassbar. In dieser Arbeit wollen wir ihn deshalb zuerst präzise algebraisch formulieren um danach mit dem Satz von Liouville eine Antwort auf die Frage nach elementarer Integrierbarkeit geben zu können.
Der Ansatz den wir dabei verfolgen wollen stammt im Wesentlichen aus [Ros72].

Grundlegende Begriffe zu Differentialkörpern

Definition (Differentialkörper). Ein *Differentialkörper* ist ein Körper K zusammen mit einer Selbstabbildung $K \to K,\ a \mapsto a'$, sodass für alle $a, b \in K$

- $(a+b)' = a' + b'$
- $(ab)' = a'b + ab'$

Eine Element $a \in K$ heißt *Konstante*, falls $a' = 0$.

Beispiel (Meromorphe Funktionen). Der Körper der meromorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ zusammen mit der üblichen Ableitung ist ein Differentialkörper. Dieser ist für uns von besonderem Interesse, da jede elementare Funktion meromorph auf einem geeigneten Gebiet ist. Die Konstanten dieses Körpers sind genau die konstanten Funktionen im üblichen Sinn.

Lemma 1 (Grundlagen Differentialkörper). *Ist K ein Differentialkörper, so gelten die üblichen Ableitungsregeln für $a, b \in K, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \qquad \left(\frac{a}{b^n}\right)' = \frac{a'}{b^n} - \frac{n \cdot ab'}{b^{n+1}} \qquad (a^n)' = na^{n-1} \cdot a'$$

und $0' = 1' = 0$. Insbesondere bilden die Konstanten einen Teilkörper.

Beweis: Es gilt

$$0' = (0+0)' = 0' + 0' \quad \Rightarrow \quad 0' = 0 \qquad \text{und} \qquad 1' = (1 \cdot 1)' = 1' + 1' \quad \Rightarrow \quad 1' = 0$$

somit folgt auch[1]

$$0 = 1' = ((-1) \cdot (-1))' = -(-1)' - (-1)' = -2 \cdot (-1)' \quad \Rightarrow \quad (-1)' = 0$$

[1] Im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ gilt $-1 = 1$, also folgt ebenfalls $(-1)' = 0$

Weiter gilt

$$a' = \left(b \cdot \frac{a}{b}\right)' = \frac{b'a}{b} + b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)' \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

daraus folgt direkt die andere Rechenregel zu Quotienten.
Nach induktiver Anwendung der Produktregel folgt $(a^n)' = na^{n-1} \cdot a'$ für $n \geq 1$. Im Fall $n = 0$ wurde wegen $a^0 = 1$ bereits bewiesen und der Fall $n \leq -1$ lässt sich mit der Quotientenregel und $1' = 0$ auf den Fall $n \geq 1$ zurückführen.
Die Konstanten bilden einen Teilkörper, da

- $0' = 1' = (-1)' = 0$
- Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation nach Summen- und Produktregel
- Abgeschlossenheit unter multiplikativen Inversen nach der Quotientenregel ▲

Um unsere Problemstelldung vollständig zu algebraisieren, benötigen wir noch Definitionen von Exponential- und Logarithmusfunktion, die ohne Grenzwerte auskommen. Da wir eigentlich nur an Ableitungen interessiert sind, bietet es sich an diese über ihre Ableitungsregeln zu definieren:

Definition (Exponential und Logarithmus)**.** Ist K ein Differentialkörper und $a, b \in K$ mit $a \neq 0$, so ist a ein *Exponential* von b bzw. b ein *Logarithmus* von a falls

$$b' = \frac{a'}{a}$$

Lemma 2 (Ableitungsregel Logarithmus)**.** *Sei K ein Differentialkörper, $a_1, \ldots, a_n \in K^*$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}$. Ist $b \in K$ ein Logarithmus von $a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n}$ so gilt*

$$b' = \frac{(a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n})'}{a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n}} = v_1 \cdot \frac{(a_1)'}{a_1} + \cdots + v_n \cdot \frac{(a_n)'}{a_n}$$

Beweis: Durch induktives Anwenden der Produktregel erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n})'}{a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n}} &= \frac{1}{a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_1^{v_1} \cdots \widehat{a_i^{v_i}} \cdots a_n^{v_n} \cdot (a_i^{v_i})' \\
&= \frac{1}{a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_1^{v_1} \cdots \widehat{a_i^{v_i}} \cdots a_n^{v_n} \cdot v_i \left(a_i^{v_i - 1}\right) \cdot (a_i)' \\
&= v_1 \cdot \frac{(a_1)'}{a_1} + \cdots + v_n \cdot \frac{(a_n)'}{a_n}
\end{aligned}$$

▲

Definition (Differentialkörpererweiterung)**.** Eine Körpererweiterung differentieller Körper $K \subseteq L$ heißt *Differentialkörpererweiterung*, wenn die beiden Ableitungen auf K übereinstimmen.

Proposition 3 (algebraische Differentialkörpererweiterung)**.** *Sei K ein Differentialkörper und $K \subseteq L$ eine separable (insbesondere algebraische) Körpererweiterung. Dann existiert eine eindeutige Erweiterung der Ableitung von K auf L. Außerdem gilt für jeden Automorphismus σ von L/K*

$$(\sigma(t))' = \sigma(t') \qquad \text{für alle } t \in L$$

Beweis: [2] Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit, sei also angenommen, dass $K \subseteq L$ eine Differentialkörpererweiterung ist. Dann gilt für $f \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ und $t \in L$

$$(f(t))' = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i t^i\right)' = \sum_{i=0}^{n} a_i' t^i + a_i \cdot i t^{i-1} \cdot t' = D_0(f)(t) + D_1(f)(t) \cdot t'$$

wobei

$$\begin{aligned}
&D_0 \colon K[X] \to K[X] \\
&\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i' X^i
\end{aligned}$$

[2] Ist man nur am klassischen Fall über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ interessiert, so folgt diese Aussage direkt aus dem Satz über implizierte Funktionen und den Ableitungsregeln für implizite Funktionen.

und $D_1\colon K[X] \to K[X]$ die übliche Ableitung. Wählen wir nun f gleich dem Minimalpolynom von t, so gilt $D_1(f)(t) \neq 0$ da die Körpererweiterung separabel ist. Also gilt

$$t' = -\frac{D_0(f)(t)}{D_1(f)(t)}$$

somit ist die Differenzialkörperstruktur auf L eindeutig bestimmt, sofern sie existiert.
Aufgrund der bereits bewiesenen Eindeutigkeit und da jede algebraische Körpererweiterung Vereinigung ihrer endlichen Teilerweiterungen ist, können wir zum Nachweis der Existenz annehmen, dass $K \subseteq L$ eine endliche Erweiterung ist. Nach dem Satz vom primitiven Element existiert also ein $t \in L$ mit $L = K(t)$. Sei f das Minimalpolynom von t über K. Da die Körpererweiterung separabel ist, gilt $D_1(f)(t) \neq 0$. Da $L = K(t) = K[t]$ existiert $p \in K[X]$ mit

$$p(t) = -\frac{D_0(f)(t)}{D_1(f)(t)}$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned} D\colon K[X] &\to K[X] \\ g &\mapsto D_0(g) + p \cdot D_1(g) \end{aligned}$$

Nach der Definition folgt sofort, dass $D(g+h) = D(g)+D(h)$ und $D(gh) = D(g)\cdot h + g\cdot D(h)$ für alle $g, h \in K[X]$. Wir betrachten den Ringepimorphismus $\pi\colon K[X] \to K[t] = L$, der gegeben ist durch $X \mapsto t$. Da

$$D(f)(t) = D_0(f)(t) + p(t) \cdot D_1(f)(t) = 0,$$

gilt $D(f) \in (f) = \ker(\pi)$. Somit existiert nach der universellen Eigenschaft des Quotienten ein Gruppenhomomorphismus $A\colon L = K[t] \simeq K[X]/\ker(\pi) \to K[t] = L$ mit $A \circ \pi = \pi \circ D$. Dieser ist die gesuchte eindeutige Erweiterung der Differentialkörperstruktur von K auf L.
Weiter ist auch $\sigma \circ A \circ \sigma^{-1}$ eine Ableitung auf L die mit der Ableitung auf K übereinstimmt, also gilt $\sigma \circ A = A \circ \sigma$. ⁂

Definition (elementare Körpererweiterung)**.** Eine Differentialkörpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *elementar*, falls $L = K(t_1, \ldots, t_n)$ mit t_i algebraisch über $K(t_1, \ldots, t_{i-1})$ oder Logarithmus oder Exponential eines Elements aus $K(t_1, \ldots, t_{i-1})$.

Bemerkung. Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) ist genau dann elementar im Sinne der Einleitung, wenn sie meromorph auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist und Element einer elementaren Körpererweiterung des Körpers der rationalen Funktionen auf G (falls f nur auf $\mathbb{R}$ definiert ist, fordern wir zunächst holomorphe Fortsetzbarkeit auf ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$). Wir erlauben hier komplexwertige Funktionen, denn dann lassen sich die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen sowie ihre Umkehrabbildungen durch Exponentialfunktion und Logarithmus darstellen, zum Beispiel gilt

$$\arctan(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(\log(1 - \mathrm{i}\,x) - \log(1 + \mathrm{i}\,x))$$

Da i algebraisch über $\mathbb{R}(t)$ ist, erlaubt der Begriff der elementaren Körpererweiterung es ohnehin nicht, komplexwertige Funktionen auszuschließen.

Der Satz von Liouville

Gerüstet mit diesen Begriffen, können wir den Hauptsatz dieser Arbeit formulieren. Er erlaubt uns für gegebene Funktionen zu entscheiden, ob sie elementar integrierbar sind.

Satz 4 (Liouville, 1833)**.** *Sei K ein Differentialkörper von Charakteristik 0 und $f \in K$.*
Existiert eine elementare Körpererweiterung $K \subseteq L$, sodass L die selben Konstanten wie K hat und ein $g \in L$ mit $g' = f$, dann gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in K$ und $u_1, \ldots, u_n \in K^*, v \in K$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

Beispiel (neue Konstanten)**.** Wir betrachten den rationalen Funktionenkörper $K := \mathbb{R}(x)$ und

$$f := \frac{1}{x^2+1} = \arctan'(x) = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\log(1 - \mathrm{i}\,x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\log(1 + \mathrm{i}\,x)\right)'$$

Damit ist f in $\mathbb{R}(x) \subseteq \mathbb{R}(x)(\mathrm{i}, \log(1-\mathrm{i}\,x), \log(1+\mathrm{i}\,x)) =: L$ elementar integrierbar. In dieser Erweiterung treten allerdings neue Konstanten auf: Die Konstanten von K sind $\mathbb{R}$, während die Konstanten von L durch $\mathbb{C}$ gegeben sind. Tatsächlich ist f auch nicht von der im Satz von Liouville gegebenen Form:
Angenommen es existieren $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}(x)^*, v \in \mathbb{R}(x)$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

Das Polynom $p := x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ ist irreduzibel. Tritt p v_i-mal in der Primfaktorzerlegung von u_i auf, so tritt nach Lemma 2 p nicht im Nenner von $\frac{u_i'}{u_i} - v_i \frac{p'}{p}$ auf. Es gilt zudem

$$v' = f - \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i} = \frac{1}{p} - \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \left(\frac{u_i'}{u_i} - v_i \frac{p'}{p} \right) - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \frac{p'}{p}$$

also tritt p höchstens einmal im Nenner von v' auf. Tritt p im Nenner von mindestens einmal v auf, so tritt p nach Lemma 1 mindestens zweimal im Nenner von v' auf. Damit tritt p nicht im Nenner von v und v' auf. Da

$$v + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \left(\frac{u_i'}{u_i} - v_i \frac{p'}{p} \right) = f - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \frac{p'}{p} = \frac{1}{p} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} 2 c_i v_i x \right)$$

folgt, dass $1 + \sum_{i=1}^{n} 2c_i v_i x$ durch $x^2 + 1$ teilbar ist. Widerspruch!

In diesem Beispiel ist der Satz von Liouville nicht anwendbar, da in der zu betrachtenden elementaren Körpererweiterung $K \subseteq L$ neue Konstanten auftreten. Allerdings liegen die Konstanten von L zumindest im algebraischen Abschluss von K. In der Tat ist der algebraische Abschluss von K die einzige Quelle für neue Konstanten. Dies erlaubt eine Verallgemeinerung des Satz von Liouville ohne die Konstantenbedingung, vgl. [Ris69, S. 171]. Für den Beweis benötigen wir noch zwei weitere Lemmas:

Lemma 5. *(logarithmische Differentialkörpererweiterung) Sei $K \subseteq K(t)$ eine Differentialkörpererweiterung, sodass K und $K(t)$ die selben Konstanten haben, t transzendent über K ist und $t' \in K$ (insbesondere wenn t Logarithmus eines Elements aus K). Dann ist für jedes Polynom $V = \sum_{i=0}^{n} \mu_i t^i \in K[t]$ mit $n > 0$ auch $(V(t))' \in K[t]$ mit*

$$\deg((V(t))') = \begin{cases} n, & \textit{falls } \mu_n' \neq 0 \\ n-1, & \textit{falls } \mu_n' = 0 \end{cases}$$

Beweis: Es gilt

$$(V(t))' = \mu_0' + \sum_{i=1}^{n} \mu_i' t^i + \mu_i \cdot i t^{i-1} \cdot t' = \mu_n' t^n + \mu_0' + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mu_{i-1}' + \mu_i \cdot i \cdot t' \right) t^i.$$

Falls $\mu_n' \neq 0$ folgt somit die Behauptung. Sei also $\mu_n' = 0$. Angenommen

$$0 = \mu_{n-1}' + \mu_n \cdot n \cdot t' = (\mu_{n-1} + \mu_n \cdot n \cdot t)'$$

so ist $\mu_{n-1} + \mu_n \cdot n \cdot t \in L$ eine Konstante, also gilt $\mu_{n-1} + \mu_n \cdot n \cdot t \in K$. Widerspruch, zu $t \notin K$! ▲

Lemma 6. *(exponentielle Differentialkörpererweiterung) Sei $K \subseteq K(t)$ eine Differentialkörpererweiterung, sodass K und $K(t)$ die selben Konstanten haben, t transzendent über K ist und $\frac{t'}{t} \in K$ (insbesondere wenn t Exponential eines Elements aus K). Dann ist für jedes nicht-konstante Polynom $V \in K[t]$ auch $(V(t))' \in K[t]$ und $\deg(V) = \deg((V(t))')$, wobei $(V(t))'$ nur dann ein Vielfaches von V ist, wenn V ein Monom ist.*

Beweis: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq a \in K$

$$(at^n)' = a't^n + nat^{n-1}t' = \overbrace{\left(a' + na \cdot \frac{t'}{t} \right)}^{\in K} t^n.$$

Falls $a' + na \cdot \frac{t'}{t} = 0$ gilt, ist at^n konstant, also $at^n \in K$. Widerspruch zur Transzendenz von t, also gilt $a' + na \cdot \frac{t'}{t} \neq 0$.
Wendet man dies auf jedes Monom von V einzeln an, so folgt $(V(t))' \in K[t]$ und $\deg(V) = \deg((V(t))')$.

Ist nun $(V(t))' = f \cdot V$ für ein $f \in K[t]$, gilt wegen der Grade sogar $f \in K$. Angenommen V ist kein Monom. Seien $a_n t^n$ und $a_m t^m$ zwei verschiedene Monome von V mit $n < m$. Es gilt

$$\frac{\overbrace{a_n' + n a_n \frac{t'}{t}}^{\substack{n\text{-ter Koeffizient} \\ \text{von } (V(t))'}}}{a_n} = f = \frac{\overbrace{a_m' + m a_m \frac{t'}{t}}^{\substack{m\text{-ter Koeffizient} \\ \text{von } (V(t))'}}}{a_m}$$

Somit gilt

$$\left(\frac{a_n t^n}{a_m t^m}\right)' = \frac{\left(\left(a_n' + n a_n \frac{t'}{t}\right) \cdot a_m - \left(a_m' + n a_m \frac{t'}{t}\right) \cdot a_n\right) \cdot t^{n+m}}{a_m^2 \cdot t^{2m}} = 0$$

also $\frac{a_n t^n}{a_m t^m} \in K$. Widerspruch zur Transzendenz von t. $\blacktriangle$

Zudem benötigen wir folgenden Satz

Satz 7 (Partialbruchzerlegung)**.** *Sei $V(X) \in K(X)$. Dann existieren eindeutig bestimmt $g_{h,r} \in K[X]$ fast alle 0 mit $r > 0$, $h \in K[X]$ normiert, irreduzibel und $\deg(g_{h,r}) < \deg(h)$, sowie $p \in K[X]$, sodass*

$$V(X) = p(X) + \sum_{\substack{h \in K[X] \\ \text{normiert} \\ \text{irreduzibel}}} \sum_{r>0} \frac{g_{h,r}(X)}{h(X)^r}$$

Beweis. Folgt aus [Lan05, Kap. 4, Theorem 4.2, 4.3] zusammen mit Division mit Rest. $\blacktriangle$

Damit können wir uns nun dem Beweis des Satz von Liouville zuwenden.

Beweis Satz von Liouville: Nach Voraussetzung existiert eine Darstellung $L = K(t_1, \ldots, t_N)$ mit t_i algebraisch über $K(t_1, \ldots, t_{i-1})$ oder Logarithmus bzw. Exponential eines Elements aus $K(t_1, \ldots, t_{i-1})$.
Der Beweis erfolgt durch Induktion über N:
Induktionsanfang: $N = 0$
Wir wählen $n := 0$ und $v := g \in L = K$.
Induktionsschritt: $N - 1 \rightsquigarrow N$
Sei $t := t_1$. Nach der Induktionsannahme angewendet auf $K(t) \subseteq K(t_1, \ldots, t_N)$ existieren Konstanten $\varrho_1, \ldots, \varrho_m \in K(t)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K(t)^*, \mu \in K(t)$ sodass

$$f = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{\lambda_i'}{\lambda_i} + \mu'$$

Da L die selben Konstanten wie K hat, gilt $\varrho_1, \ldots, \varrho_n \in K$.
Fall 1: t algebraisch über K
Somit existieren Polynome $U_1, \ldots, U_m, V \in K[X]$, sodass $U_i(t) = \lambda_i$ für alle $1 \le i \le m$ und $V(t) = \mu$. Seien $\tau_1, \ldots, \tau_s \in \overline{K(t)}$ die Konjugierten von $t = \tau_1$ in einem algebraischen Abschluss von K. Da wir in Charakteristik 0 befinden, sind dies genau die *einfachen* Nullstellen des Minimalpolynoms von t über K. Wir wählen Einbettungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \colon K(t) \to \overline{K(t)}$ über K mit $\sigma_1(t) = \tau_1, \ldots, \sigma_s(t) = \tau_s$. Dann gilt für $1 \le j \le s$ wegen

$$f = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{\lambda_i'}{\lambda_i} + \mu' = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} + (V(t))'$$

und Proposition 3 auch

$$f = \sigma_j(f) = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(\sigma_j(U_i(t)))'}{\sigma_j(U_i(t))} + (\sigma_j(V(t)))' = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(\tau_j))'}{U_i(\tau_j)} + (V(\tau_j))'$$

Somit ist nach Lemma 2 (da Charakteristik 0 ist $s \in K^*$)

$$f = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(\tau_j))'}{U_i(\tau_j)} + (V(\tau_j))' = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varrho_i}{s} \cdot \frac{(U_i(\tau_1) \cdots U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1) \cdots U_i(\tau_s)} + \left(\frac{V(\tau_1) + \cdots + V(\tau_s)}{s}\right)'$$

Für $1 \le i \le m$ sind $U_i(\tau_1) \cdots U_i(\tau_s)$ und $V(\tau_1) + \cdots + V(\tau_s)$ symmetrische Polynome in $\tau_1, \ldots, \tau_s$ mit Koeffizienten in K. Damit folgt durch Betrachten der Galoiserweiterung $K \subseteq K(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ schon $U_i(\tau_1) \cdots U_i(\tau_s), V(\tau_1) + \cdots + V(\tau_s) \in K$. Damit ist obige Darstellung von der gesuchten Form.

Fall 2: t transzendent über K

Somit ist $K(t)$ ein rationaler Funktionenkörper über K, also exitieren rationale Funktionen $U_1, \ldots, U_m, V \in K(t)$, sodass $U_i(t) = \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $V(t) = \mu$. Für $1 \leq i \leq m$ erhalten wir durch Primfaktorzerlegung $m_i \in \mathbb{N}$ und für alle $1 \leq j \leq m_i$ ein $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in K$ und $U_{ij} \in K[X]$ normiert und irreduzibel, sodass

$$U_i = \alpha_i \cdot \prod_{j=1}^{m_i} U_{ij}^{n_{ij}}$$

Nach Anwenden der Ableitungsregel für den Logarithmus aus Lemma 2 können wir deshalb oBdA. annehmen, dass $U_i \in K$ oder $U_i \in K[t]$ normiert und irreduzibel. Weiterhin kann angenommen werden, dass die $U_1, \ldots, U_m$ paarweise verschieden sind und alle $\varrho_i \neq 0$.

Zudem betrachten wir die Partialbruchzerlegung von V nach Satz 7

$$V(t) = p(t) + \sum_{\substack{h \in K[t] \\ \text{normiert} \\ \text{irreduzibel}}} \sum_{r>0} \frac{g_{h,r}(t)}{h(t)^r}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir zudem $g_{h,0} := 0$ für alle $h \in K[t]$ normiert, irreduzibel.

Fall 2.1: t ist Logarithmus eines Elements aus K

Sei also $a \in K$ mit $t' = \frac{a'}{a}$. Für $1 \leq i \leq m$ gilt, da U_i normiert, nach Lemma 1 $(U_i(t))' \in K[t]$ und $\deg(U_i(t)') < \deg(U_i(t))$. Da U_i zudem irreduzibel, ist $\frac{(U_i(t))'}{U_i(t)}$ vollständig gekürzt.

Die Partialbruchzerlegung von $(V(t))'$ ist nach Lemma 1 gegeben durch

$$\begin{aligned}
(V(t))' &= p'(t) + \sum_{\substack{h \in K[t] \\ \text{normiert} \\ \text{irreduzibel}}} \sum_{r>0} \frac{(g_{h,r}(t))'}{h(t)^r} - \frac{r \cdot g_{h,r}(t) \cdot (h(t))'}{h(t)^{r+1}} \\
&= p'(t) + \sum_{\substack{h \in K[t] \\ \text{normiert} \\ \text{irreduzibel}}} \sum_{r>0} \frac{(g_{h,r}(t))' - (r-1) \cdot g_{h,r-1}(t) \cdot (h(t))'}{h(t)^r}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} + (V(t))' \\
&= \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} + p'(t) + \sum_{\substack{h \in K[t] \\ \text{normiert} \\ \text{irreduzibel}}} \sum_{r>0} \frac{(g_{h,r}(t))' - (r-1) \cdot g_{h,r-1}(t) \cdot (h(t))'}{h(t)^r}
\end{aligned}$$

Angenommen $V(t)$ ist kein Polynom, also existiert $h \in K[X]$ normiert, irreduzibel mit

$$R := \max\{r \in \mathbb{N} \mid g_{h,r}\} > 0.$$

Wie bereits bei den U_i ist $\frac{(h(t))'}{h(t)^{r+1}}$ vollständig gekürzt. Damit tritt

$$-R \cdot g_{h,R}(t) \cdot \frac{(h(t))'}{h(t)^{R+1}}$$

in der Partialbruchzerlegung von f auf. Widerspruch zur Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung von $f \in K$ aus Satz 7, also ist $V(t) \in K[X]$.

Analog folgt weiter, dass kein U_i ein irreduzibles Polynom sein kann, also gilt $\lambda_i = U_i \in K$ für $1 \leq i \leq m$. Nach entsprechendem Umstellen folgt damit $(V(t))' \in K$. Nach Lemma 5 ist also $V(t) = \varrho t + v$ mit $\varrho \in K$ Konstante und $v \in K$. Damit ist

$$f = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{\lambda_i'}{\lambda_i} + \varrho \cdot \frac{a'}{a} + v'$$

von der gesuchten Form.

Fall 2.2: t ist Exponential eines Elements aus K

Somit ist existiert $b \in K$ mit $b' = \frac{t'}{t}$. Nach Lemma 6 ist für alle $t \neq P(t) \in K[t]$ normiert und irreduzibel, auch $(P(t))' \in K[t]$ und $P(t)$ teilt $(P(t))'$ nicht. Das selbe Argument wir in Fall 2.1 zeigt, dass $P \neq U_i(t)$ für $1 \leq i \leq m$ und dass P in keinem Nenner der Partialbruchzerlegung von V auftritt. Somit gilt

$$V(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j t^j$$

mit $a_j \in K$ fast alle 0. Da $\frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} \in K$ für alle $1 \leq i \leq m$ ist auch $(V(t))' \in K$, also ist nach Lemma 6 auch $\mu = V(t) \in K$. Sind alle $U_1, \ldots, U_m \in K$ ist die gesuchte Darstellung gefunden. Sonst sei nach Umnummerierung $U_1 = t$ und $U_2, \ldots, U_m \in K$. Somit ist

$$f = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} + (V(t))' = \varrho_1 \cdot \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} + (V(t))' = \sum_{i=2}^{m} \varrho_i \cdot \frac{(U_i(t))'}{U_i(t)} + (\varrho_1 b + V(t))'$$

von der gesuchten Form. $\blacktriangle$

Beispiel (e^{-x^2})**.** Sei $t := e^{-x^2}$. Wir zeigen zunächst, dass t transzendent über $F := \mathbb{C}(x)$ ist. Angenommen t ist nicht transzendent über F, sei also

$$P := X^m + \lambda_{m-1}X^{m-1} + \cdots + \lambda_0 \in F[X]$$

das Minimalpolynom von t, also insbesondere

$$t^m + \lambda_{m-1}t^{m-1} + \cdots + \lambda_0 = 0. \tag{1}$$

Nach Ableiten beider Seiten folgt

$$-2x \cdot m \cdot t^m + \cdots + \lambda_0' = 0. \tag{2}$$

Da P Minimalpolynom von t muss Gleichung (2) proportional zu Gleichung (1) sein, insbesondere folgt

$$-2mx = \frac{\lambda_0'}{\lambda_0}$$

Da alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{C}[x]$ linear sind, folgt aus dem üblichen Idee λ_0 in Primfaktoren zu zerlegen und Lemma 2 anzuwenden, dass $\frac{\lambda_0'}{\lambda_0}$ entweder 0 ist, oder eine Summe von Brüchen mit konstantem Zähler und linearem Nenner. Widerspruch! Dies zeigt, dass t transzendent über F.
Wir wenden uns nun dem eigentlichem Argument zu und betrachten $K := \mathbb{C}(x,t)$. Angenommen $t = e^{-x^2}$ ist elementar integrierbar. Somit existieren nach dem Satz von Liouville $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}(x, e^{-x^2})^*, v \in \mathbb{C}(x, e^{-x^2})$ sodass

$$t = e^{-x^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i} + v' \tag{$*$}$$

Sei $F := \mathbb{C}(x)$. Somit sind $u_1, \ldots, u_n \in F(t)$. Wir verfahren jetzt analog zum Beweis des exponentiellen Falls im Satz von Liouville: Indem wir zuerst jedes u_i als Produkt ganzzahliger Potenzen normierter, irreduzibler Elemente von $F[t]$ schreiben und dann die Ableitungsregel des Logarithmus aus Lemma 2 anwenden, können wir oBdA. annehmen, dass $u_i \in F$ oder $u_i \in F[t]$ normiert und irreduzibel. Außerdem schreiben wir v mithilfe der Partialbruchzerlegung als Summe eines Polynoms in $F[t]$ und Termen der Form $\frac{g(t)}{h(t)^r}$ mit $h(t) \in F[t]$ normiert und irreduzibel, $r > 0$ und $0 \neq g(t) \in F[t]$ mit $\deg(g(t)) < \deg(h(t))$. Wiederum folgt aus Lemma 6, dass

$$v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j t^j \quad \Rightarrow \quad v' = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \cdot j \cdot t^j \cdot \frac{t'}{t} + a_j' \cdot t^j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-2x \cdot a_j \cdot j + a_j') \cdot t^j$$

mit $a_j \in F$ fast alle 0 und dass $u_1, \ldots, u_n \in F \cup \{t\}$. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i} \in F.$$

Nach Koeffizientenvergleich in $(*)$ (hier geht insbesondere ein, dass t transzendent über F) folgt, dass

$$1 = -2xa_1 + a_1'$$

Widerspruch, denn die Gleichung $1 = -2x \cdot a + a'$ ist für kein $a \in F = \mathbb{C}(x)$ erfüllt.

Dieses Beispiel lässt sich leicht für beliebige Funktionen der Form $f(x) \cdot e^{g(x)}$ für $f, g \in \mathbb{C}(x)$ und $f \neq 0, g' \neq 0$ verallgemeinern (vgl. [Ros72, Abschnitt 6]).

Bemerkung. Der Satz von Liouville liefert zwar eine explizite Beschreibung jeder elementar integrierbaren Funktion, allerdings ist es für beliebige Funktionen nicht so leicht festzustellen, sie von der beschriebenen Form sind. Es gibt aber einen „Algorithmus“ nach Robert Risch, der für eine beliebige elementare Funktion ein elementares Integral bestimmen kann, oder feststellt, dass es ein solches nicht gibt (vgl. [Ris69]).

Literatur

[Lan05] Serge Lang. *Undergraduate Algebra*. 2005.

[Ris69] Robert H. Risch. „The problem of integration in finite terms". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 139.0 (1969), S. 167–189.

[Ros72] Maxwell Rosenlicht. „Integration in Finite Terms". In: *The American Mathematical Monthly* 79.9 (1972), S. 962–972.