Ein topologisches Modell für S4

Hausarbeit im Proseminar „Nicht-klassische Logiken“ bei Dr. Holger Leuz

Tobias Hirsch, MNr. 2207225

20. April 2023

Abstract

Dirk van Dalen beschreibt in [Dal01] ein topologisches Modell für den Intuitionismus. In dieser Arbeit wollen wir ein topologisches Modell für S4 ausarbeiten, dass unter Gödel-Übersetzung mit diesem topologischen Modell für den Intuitionismus verträglich ist.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Bur12] John P. Burgess. *Philosophical Logic*. Princeton Foundations of Contemporary Philosophy. Princeton University Press, 2012.

[Dal01] Dirk van Dalen. „Intuitionistic Logic“. In: *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Hrsg. von Lou Goble. Blackwell Philosophy Guides. Blackwell, 2001. Kap. 11, S. 224–257.

Notation

Sei X eine Menge und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann notieren wir $Y^{\mathbf{c}}$ für das Komplement von Y in X und $\mathcal{P}(X)$ für die Potenzmenge von X.
Trägt X zusätzlich die Struktur eines topologischen Raumes, so steht

- $\mathrm{int}(Y)$ für das Innere von Y
- $\mathrm{cl}(Y)$ für den Abschluss von Y

und $\mathcal{O}(X)$ für die Menge aller offenen Mengen von X.
Wir schreiben $\mathbb{AL}$ für die Menge der aussagenlogischen Formeln und $\mathbb{ML}$ für die Menge der modallogischen Formeln. Gegeben eine aussagenlogische Formel A, so notieren wir $\overline{A}$ für die Gödel-Übersetzung von A (siehe Anhang A.3).

1. Topologisches Modell für den Intuitionismus

Wir beginnen mit einer kurzen Wiedergabe des in [Dal01, Abschnitt 3.1] beschriebenen topologisches Modell für den Intuitionismus:

Definition. Ein *topologisches* I-*Modell* ist gegeben durch ein Tupel $(X, [\![-]\!])$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Bewertungsfunktion $[\![-]\!] : \mathbb{AL} \to \mathcal{O}(X)$ die jeder aussagenlogischen Formel eine offene Teilmenge von X zuordnet, sodass für aussagenlogische Formeln A, B

(TI-1) $\quad [\![\neg A]\!] = \mathrm{int}([\![A]\!]^{\mathbf{c}})$

(TI-2) $\quad [\![A \wedge B]\!] = [\![A]\!] \cap [\![B]\!]$

(TI-3) $\quad [\![A \vee B]\!] = [\![A]\!] \cup [\![B]\!]$

(TI-4) $\quad [\![A \to B]\!] = \mathrm{int}([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!])$

(TI-5) $\quad [\![\bot]\!] = \varnothing$

(TI-6) $\quad [\![\top]\!] = X$

Zudem ist A *gültig in einem topologischen* I-*Modell* $\mathcal{M} := (X, [\![-]\!])$ (geschrieben $\mathcal{M} \vDash_{\mathrm{TI}} A$), wenn $[\![A]\!] = X$. Weiter ist A *topologisch* I-*gültig* (geschrieben $\vDash_{\mathrm{TI}} A$), wenn A in jedem topologischen I-Modell gültig ist.

Nach [Dal01, Abschnitt 3.1, S.236] gilt:

Satz 1. *Das topologische Modell für den Intuitionismus ist adäquat, also für eine beliebige aussagenlogische Formel A gilt*

$$\vdash_{\mathrm{I}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vDash_{\mathrm{TI}} A$$

2. Topologisches Modell für S4

Wir wollen nun das topologische Modell für den Intuitionismus entlang der Gödel-Übersetzung nach S4 übertragen. Somit wollen wir wiederum ein Modell $(X, [\![-]\!])$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Bewertungsfunktion $[\![-]\!]$ finden. Da in S4 der Satz des ausgeschlossenen Dritten gilt, liegt es nahe, dass sich die Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ und $\to$ wie in einer booleschen Logik verhalten, also für modallogische Formeln A und B

$$\begin{aligned} [\![\neg A]\!] &= [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \\ [\![A \wedge B]\!] &= [\![A]\!] \cup [\![B]\!] \\ [\![A \vee B]\!] &= [\![A]\!] \cup [\![B]\!] \\ [\![A \to B]\!] &= [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!] \end{aligned}$$

Vergleicht man die Regeln (iv) und (v) der Gödel-Übersetzung (vgl. Anhang A.3) mit (TI-1) und (TI-4) so erscheint es zudem sinnvoll

$$[\![\Box A]\!] = \mathrm{int}([\![A]\!]).$$

zu fordern. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition. Ein *topologisches* S4-*Modell* ist gegeben durch ein Tupel $(X, [\![-]\!])$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Bewerungsfunktion $[\![-]\!] : \mathbb{ML} \to \mathcal{P}(X)$, die jeder modallogischen Formel eine Teilmenge von X zuordnet, sodass für modallogische Formeln A, B

(TS4-1) $[\![\neg A]\!] = [\![A]\!]^{\mathbf{c}}$
(TS4-2) $[\![A \wedge B]\!] = [\![A]\!] \cap [\![B]\!]$
(TS4-3) $[\![A \vee B]\!] = [\![A]\!] \cup [\![B]\!]$
(TS4-4) $[\![A \to B]\!] = [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]$
(TS4-5) $[\![\Box A]\!] = \operatorname{int}([\![A]\!])$
(TS4-6) $[\![\Diamond A]\!] = \operatorname{cl}([\![A]\!])$
(TS4-7) $[\![\bot]\!] = \varnothing$
(TS4-8) $[\![\top]\!] = X$

Ein solches topologisches S4-Modell $(X, [\![-]\!])$ ist mit der Definition aller Operatoren durch $\neg, \to$ und $\Box$ verträglich (vgl. Anhang A.2):

$$
\begin{aligned}
[\![A \vee B]\!] &= [\![A]\!] \cup [\![B]\!] = [\![A]\!]^{\mathbf{cc}} \cup [\![B]\!] = [\![\neg A \to B]\!] \\
[\![A \wedge B]\!] &= [\![A]\!] \cap [\![B]\!] = [\![A]\!]^{\mathbf{cc}} \cap [\![B]\!]^{\mathbf{cc}} = ([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}} = [\![\neg(\neg A \vee \neg B)]\!] \\
[\![\Diamond A]\!] &= \operatorname{cl}([\![A]\!]) = \operatorname{int}([\![A]\!]^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}} = [\![\neg\Box\neg A]\!] \\
[\![\bot]\!] &= \varnothing = [\![p]\!] \cap [\![p]\!]^{\mathbf{c}} = [\![p \wedge \neg p]\!] \\
[\![\top]\!] &= X = \varnothing^{\mathbf{c}} = [\![\neg\bot]\!]
\end{aligned}
$$

Insbesondere reicht es nach ersetzen von $\wedge, \vee, \Diamond, \bot, \top$ durch ihre Definitionen aus, nur Regeln (TS4-1), (TS4-4) und (TS4-5) zu fordern.
Da in jedem topologischem S4-Modell $(X, [\![-]\!])$ nach Regel (TS4-8) $[\![\top]\!] = X$ erscheint der folgende Gültigkeitsbegriff sinnvoll:

Definition. Eine modallogische Formel A ist *gültig in einem topologischem* S4-*Modell* $\mathcal{M} := (X, [\![-]\!])$ (geschrieben $\mathcal{M} \vDash_{\mathrm{TS4}} A$), wenn $[\![A]\!] = X$.
Weiterhin ist A *topologisch* S4-*gültig* (geschrieben $\vDash_{\mathrm{TS4}} A$), wenn A in jedem topologischem S4-Modell gültig ist.

Zum Beispiel gilt $\vDash_{\mathrm{TS4}} \Box A \to A$, denn in einem beliebigen topologischen S4-Modell $(X, [\![-]\!])$ ist

$$[\![\Box A \to A]\!] = [\![\Box A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!] = \operatorname{int}([\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!] = X.$$

Eine Möglichkeit topologische S4-Modelle auf einem gegebenen topologischen Raum zu definieren, besteht darin zunächst Atomformeln eine Bewertung zuzuordnen, und diese dann gemäß den Regeln (TS4-1) bis (TS4-8) auf alle modallogischen Formeln vorzusetzen. Damit lässt sich direkt die topologische S4-Ungültigkeit des Axioms

(5) $A \to \Box\Diamond A$

nachweisen: Wir betrachten den topologischen Raum $\mathbb{R}$ und ordnen der Atomformel p die Bewerung $[\![p]\!] = \{0\}$ zu. Allen anderen Atomformeln ordnen wir die leere Menge zu. Dann ist

$$
\begin{aligned}
[\![p \to \Box\Diamond p]\!] &= [\![p]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![\Box\Diamond p]\!] = [\![p]\!]^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}(\operatorname{cl}([\![p]\!])) \\
&= (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{0\})) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \operatorname{int}(\{0\}) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \varnothing = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

also $\nvDash_{\mathrm{TS4}}$ (5).
Nach der Einführung eines Gültigkeitsbegriffs stellt sich natürlicherweise die Frage nach der Adäquatheit:

Satz 2. *Das topologische Modell für* S4 *ist adäquat, also für eine beliebige modallogische Formel A gilt*

$$\vdash_{\mathrm{S4}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vDash_{\mathrm{TS4}} A$$

Der Beweis für diesen Satz erstreckt sich über die nächsten beiden Abschnitte.

2.1. Korrektheit

Es ist $\vdash_{\mathrm{S4}} A \Rightarrow \vDash_{\mathrm{TS4}} A$ für eine beliebige modallogische Formel A zu zeigen. Dafür reicht es aus nachzuweisen, dass im Hilbert-Kalküls für S4 (vgl. Anhang A.2) die Axiome topologisch S4-gültig sind und die Ableitungsregeln die Gültigkeit erhalten:
Seien A, B, C modallogische Formeln und $(X, [\![-]\!])$ ein toplogisches S4-Modell. Dann gilt[1]

(A1) $[\![A \to (B \to A)]\!] = [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup ([\![B]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!]) = [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!] \cup [\![B]\!]^{\mathbf{c}} = X$

(A2) $[\![(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)]\!] = [\![A \to (B \to C)]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![(A \to B) \to (A \to C)]\!]$
$= ([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![C]\!])^{\mathbf{c}} \cup [\![A \to B]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A \to C]\!] = ([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![C]\!])^{\mathbf{c}} \cup ([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!])^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![C]\!]$
$= ([\![A]\!] \cap [\![B]\!] \cap [\![C]\!]^{\mathbf{c}}) \cup ([\![A]\!] \cap [\![B]\!]^{\mathbf{c}}) \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![C]\!] = [\![B]\!] \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![C]\!] \cup [\![B]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![C]\!] = X$

(A3) $[\![(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)]\!] = [\![(\neg B \to \neg A)]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A \to B]\!] = ([\![\neg B]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![\neg A]\!])^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]$
$= ([\![B]\!] \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!] = X$

(K) $[\![\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)]\!] = [\![\Box(A \to B)]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![\Box A \to \Box B]\!] = \operatorname{int}([\![A \to B]\!])^{\mathbf{c}} \cup [\![\Box A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![\Box B]\!]$
$= \operatorname{int}([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![B]\!]) = (\operatorname{int}([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]) \cap \operatorname{int}([\![A]\!]))^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![B]\!])$
$= \operatorname{int}(([\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!]) \cap [\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![B]\!]) = \operatorname{int}([\![B]\!] \cap [\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![B]\!])$
$= (\operatorname{int}([\![B]\!]) \cap \operatorname{int}([\![A]\!]))^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![B]\!]) = \operatorname{int}([\![B]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![B]\!]) = X$

(T) $[\![\Box A \to A]\!] = [\![\Box A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!] = \operatorname{int}([\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup [\![A]\!] = X.$

(4) $[\![\Box A \to \Box\Box A]\!] = [\![\Box A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![\Box\Box A]\!] = \operatorname{int}([\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}(\operatorname{int}([\![A]\!])) = \operatorname{int}([\![A]\!])^{\mathbf{c}} \cup \operatorname{int}([\![A]\!]) = X$

Somit sind die Axiome topologisch S4-gültig.
Seien A und B modallogische Formeln, sodass A und $A \to B$ im Modell $(X, [\![-]\!])$ gültig sind. Dann ist $[\![A]\!]^{\mathbf{c}} = \varnothing$, also

$$[\![B]\!] = [\![A]\!]^{\mathbf{c}} \cup [\![B]\!] = [\![A \to B]\!] = X.$$

Somit ist B im Modell $(X, [\![-]\!])$ gültig. Damit erhält (MP) topologische S4-Gültigkeit.
Sei A eine modallogische Formel, die im Modell $(X, [\![-]\!])$ gültig ist. Dann ist $[\![A]\!] = X$, also

$$[\![\Box A]\!] = \operatorname{int}([\![A]\!]) = \operatorname{int}(X) = X$$

Also ist $\Box A$ im Modell $(X, [\![-]\!])$ gültig. Damit erhält (G) topologische S4-Gültigkeit.

2.2. Vollständigkeit

Für eine beliebige modallogische Formel A ist $\vDash_{\mathrm{TS4}} A \Rightarrow \vdash_{\mathrm{S4}} A$ zu zeigen. Wir wollen dies tun, indem wir ein kanonisches topologisches S4-Modell konstruieren, also ein Modell in dem eine modallogische Formel genau dann gültig ist, wenn sie in S4 beweisbar ist. Wir verwenden hierfür einen Ansatz mittels maximalkonsistenter Formelmengen, ähnlich dem, den [Bur12, Kapitel 3.6] für Kripke-Rahmen nutzt. Wir beginnen zunächst mit grundlegenden Begriffen und Lemmata zu maximalkonsistenter Formelmengen (siehe auch [Bur12, S.55-57]):

Definition. [2] Eine Menge modallogischer Formeln $x \subseteq \mathbb{ML}$ heißt *konsistent*, wenn $x \nvdash_{\mathrm{S4}} \bot$.
Eine konsistente Menge modallogischer Formeln $x \subseteq \mathbb{ML}$ heißt *maximalkonsistent*, wenn jede echt-größere Menge modallogischer Formeln $y \subseteq \mathbb{ML}$ inkonsistent ist:

$$x \subsetneq y \quad \Rightarrow \quad y \vdash_{\mathrm{S4}} \bot$$

Lemma 3 (von Lindenbaum). *Jede konsistente Formelmenge ist in einer maximalkonsistenten Formelmenge enthalten.*

Beweis. Da das Alphabet der Sprache der modalen Logik abzählbar ist, ist auch die Menge aller modallogischen Formeln $\mathbb{ML}$ abzählbar. Sei also eine Abzählung $A_1, A_2, \ldots$ von $\mathbb{ML}$ gewählt.
Sei t eine konsistente Formelmenge. Wir definieren $t_0 \coloneqq t$ und rekursiv für $i \geq 1$

$$t_i \coloneqq \begin{cases} t_{i-1} \cup \{A_i\}, & \text{wenn } t_{i-1} \cup \{A_i\} \text{ konsistent} \\ t_{i-1}, & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] Man beachte hierbei insbesondere, dass für Teilmengen $Y, Z \subseteq X$ rein topologisch $\operatorname{int}(Y \cap Z) = \operatorname{int}(Y) \cap \operatorname{int}(Z)$, $\operatorname{int}(Y) \subseteq Y$ und $\operatorname{int}(\operatorname{int}(Y)) = \operatorname{int}(Y)$.

[2] Der Konsistenzbegriff hängt natürlich vom gewählten System ab. Da *maximal-S4-konsistente modallogische Formelmengen* übermäßig lang ist und hier keine Verwechslungsgefahr besteht, haben wir dies in der Begriffsbildung unterschlagen.

Nach Induktion über $i \geq 0$ ist jedes t_i eine konsistente Formelmenge. Sei nun außerdem

$$x := \bigcup_{i \geq 0} t_i.$$

Dann ist x eine konsistente Formelmenge: Für einem Beweis von $x \vdash_{\mathrm{S4}} \bot$ würden nur endlich viele Formeln von x benötigt, aber jede endliche Teilmenge von x ist bereits in einem der konsistenten t_i enthalten.
Zudem ist x maximalkonsistent: Ist $x \cup \{A_n\}$ konsistent, so ist wegen $t_{n-1} \subseteq x$ auch $t_{n-1} \cup \{A_n\}$ konsistent. Also gilt

$$A_n \in t_{n-1} \cup \{A_n\} = t_n \subseteq x.$$

Damit ist x eine maximalkonsistente Formelmenge die t enthält. □

Lemma 4 (deduktive Abgeschlossenheit)**.** *Seien x eine maximalkonsistente Formelmenge und A eine modallogische Formel. Dann gilt*

$$x \vdash_{\mathrm{S4}} A \;\Rightarrow\; A \in x,$$

also insbesondere $\vdash_{\mathrm{S4}} A \Rightarrow A \in x$.

Beweis. Es gelte $x \vdash_{\mathrm{S4}} A$. Da $x \nvdash_{\mathrm{S4}} \bot$, folgt $x \cup \{A\} \nvdash_{\mathrm{S4}} \bot$. Somit ist $x \cup \{A\}$ konsistent, also gilt $x \cup \{A\} = x$ und $A \in x$. □

Lemma 5. *Seien x eine maximalkonsistente Formelmenge und A, B modallogische Formeln. Dann gelten:*

- $\neg A \in x \;\Leftrightarrow\; A \notin x$
- $A \wedge B \in x \;\Leftrightarrow\; A \in x$ *und* $B \in x$
- $A \vee B \in x \;\Leftrightarrow\; A \in x$ *oder* $B \in x$
- $A \to B \in x \;\Leftrightarrow\; A \notin x$ *oder* $B \in x$

Beweis.

- $\Rightarrow$ Sei $\neg A \in x$. Da $\neg A \wedge A \vdash_{\mathrm{S4}} \bot$ und x konsistent, gilt $A \notin x$.
  $\Leftarrow$ Sei $A \notin x$ Da x maximalkonsistent, ist $x \cup \{A\}$ inkonsistent. Also gilt $x \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{S4}} \bot$ und somit $x \vdash_{\mathrm{S4}} A \to \bot$ beziehungsweise $x \vdash_{\mathrm{S4}} \neg A$.
- Folgt direkt aus der deduktiven Abgeschlossenheit maximalkonsistenter Formelmengen Lemma 4.
- Folgt aus den ersten beiden Punkten, da $A \vee B$ aussagenlogisch äquivalent ist zu $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.
- Folgt aus den ersten drei Punkten, da $A \to B$ aussagenlogisch äquivalent ist zu $\neg A \vee B$. □

Sei nun X die Menge aller maximalkonsistenter Formelmengen. Für eine modallogische Formel A setzen wir

$$[\![A]\!] := \{x \in X \mid A \in x\}.$$

Damit gilt wie gefordert:

Lemma 6. *Für eine modallogische Formel A ist*

$$[\![A]\!] = X \quad\Rightarrow\quad \vdash_{\mathrm{S4}} A$$

Beweis. Wir zeigen äquivalent $\nvdash_{\mathrm{S4}} A \Rightarrow [\![A]\!] \neq X$. Ist $\nvdash_{\mathrm{S4}} A$, so ist $\{\neg A\}$ konsistent, also nach dem Lemma von Lindenbaum in einer maximalkonsistenten Formelmenge x enthalten. Damit gilt nach Lemma 5 $A \notin x$, also $x \notin [\![A]\!]$. Da $x \in X$ ist also $[\![A]\!] \neq X$. □

Bereits ohne Festlegung der Topologie folgt nun alle Regeln für die Bewertungsfunktion außer (TS4-5) und (TS4-6) aus Lemma 5. Zudem folgt aus der deduktiven Abgeschlossenheit maximalkonsistenter Formelmengen Lemma 4 sofort

Lemma 7. *Für modallogische Formeln A und B gilt*

$$\vdash_{\mathrm{S4}} A \leftrightarrow B \quad\Rightarrow\quad [\![A]\!] = [\![B]\!]$$

Es verbleibt die Festlegung einer Topologie. Hierzu bemerken wir zunächst, dass das Mengensystem

$$\{[\![\Box A]\!] \mid A \text{ modallogische Formel}\}$$

topologisch Basiseigenschaft hat:

- Nach Lemma 4 gilt $[\![\Box\top]\!] = X$.
- Für modallogische Formeln A und B gilt $\vdash_{S4} \Box A \wedge \Box B \leftrightarrow \Box(A \wedge B)$, da

1.	$A \wedge B \to A$	(AL)
2.	$\Box(A \wedge B \to A)$	(G)
3.	$\Box(A \wedge B \to A) \to (\Box(A \wedge B) \to \Box A)$	(K)
4.	$\Box(A \wedge B) \to \Box A$	(MP-2,3)
5.	$A \wedge B \to B$	(AL)
6.	$\Box(A \wedge B \to B)$	(G)
7.	$\Box(A \wedge B \to B) \to (\Box(A \wedge B) \to \Box B)$	(K)
8.	$\Box(A \wedge B) \to \Box B$	(MP-6,7)
9.	$\Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B$	(AL-4,8)
10.	$A \to (B \to (A \wedge B))$	(AL)
11.	$\Box(A \to (B \to (A \wedge B)))$	(G)
12.	$\Box(A \to (B \to (A \wedge B))) \to (\Box A \to \Box(B \to (A \wedge B)))$	(K)
13.	$\Box A \to \Box(B \to (A \wedge B))$	(MP-11,12)
14.	$\Box(B \to (A \wedge B)) \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$	(K)
15.	$\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B))$	(AL-13,14)
16.	$\Box A \wedge \Box B \leftrightarrow \Box(A \wedge B)$	(DEF-9,15)

Somit ist nach Lemma 7

$$[\![\Box A]\!] \cap [\![\Box B]\!] = [\![\Box A \wedge \Box B]\!] = [\![\Box(A \wedge B)]\!] .$$

Wir betrachten die durch diese Basis definierte Topologie auf X, also

$$Y \subseteq X \text{ offen} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{für jedes } y \in Y \text{ existiert eine modallogische Formel } A, \text{ sodass } y \in [\![\Box A]\!] \subseteq Y$$

Es gilt nun (TS4-5), also $[\![\Box A]\!] = \mathrm{int}([\![A]\!])$:

$\subseteq$ Nach Definition der Topologie ist $[\![\Box A]\!]$ offen. Aus Lemma 4 und Axiom (T) folgt zudem $[\![\Box A]\!] \subseteq [\![A]\!]$. Also gilt $[\![\Box A]\!] \subseteq \mathrm{int}([\![A]\!])$.

$\supseteq$ Sei $x \in \mathrm{int}([\![A]\!])$. Also existiert eine modallogische Formel B mit $x \in [\![\Box B]\!] \subseteq [\![A]\!]$.
Für eine beliebige maximalkonsistente Formelmenge y gilt nun nach Definition der Bewertungsfunktion $\Box B \notin y$ oder $A \in y$, also nach Lemma 5 auch $\Box B \to A \in y$. Somit ist $[\![\Box B \to A]\!] = X$. Damit gilt $\vdash_{S4} \Box B \to A$ nach Lemma 6. Wegen

1.	$\Box B \to A$	
2.	$\Box(\Box B \to A)$	(G)
3.	$\Box(\Box B \to A) \to (\Box\Box B \to \Box A)$	(K)
4.	$\Box\Box B \to \Box A$	(MP-2,3)
5.	$\Box B \to \Box\Box B$	(4)
6.	$\Box B \to \Box A$	(AL-4,5)

folgt auch $\vdash_{S4} \Box B \to \Box A$. Da x nach Lemma 4 deduktiv abgeschlossen ist und $\Box B \in x$, folgt somit $\Box A \in x$ also $x \in [\![\Box A]\!]$. Damit gilt $[\![\Box A]\!] \supseteq \mathrm{int}([\![A]\!])$.

Damit folgt nach Lemma 7 auch (TS4-6), da

$$[\![\Diamond A]\!] = [\![\neg\Box\neg A]\!] = \mathrm{int}([\![A]\!]^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}} = \mathrm{cl}([\![c]\!]\ A)$$

Dies führt uns zu folgender Proposition:

Proposition 8. *Das Tupel $\mathcal{K} := (X, [\![-]\!])$ wie oben beschrieben ist ein topologisches* S4*-Modell, wobei für eine beliebige modallogische Formel A*

$$\mathcal{K} \vDash_{\mathrm{TS4}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{S4}} A$$

Beweis. Nach obigen Überlegungen ist $\mathcal{K} = (X, [\![-]\!])$ ein topologisches S4-Modell. Nach Lemma 6 gilt $\Rightarrow$ und $\Leftarrow$ ist die bereits allgemein bewiesene Korrektheit des Modells. □

Damit ist auch der Beweis der Vollständigkeit abgeschlossen:
Ist eine modallogische Formel A topologisch S4-gültig, so ist sie insbesondere im Modell $\mathcal{K}$ gültig und somit in S4 beweisbar.

3. Kompatibilität mit Gödel-Übersetzung

Die ursprüngliche Motivation für das topologische S4-Modell war eine Übertragung des topologischen Modells für den Intuitionismus entlang der Gödel-Übersetzung. Eine genauere Untersuchung dieser Kompatibilität führt uns zu folgenden beiden Sätzen:

Satz 9. *Ist $\mathcal{M}_{\mathrm{S4}} := (X, [\![-]\!]_{\mathrm{S4}})$ ein topologisches* S4*-Modell, so definiert*

$$\begin{aligned} [\![-]\!]_{\mathrm{I}} : \mathbb{AL} &\to \mathcal{O}(X) \\ A &\mapsto [\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} \end{aligned}$$

ein topologisches I*-Modell $\mathcal{M}_{\mathrm{I}} := (X, [\![-]\!]_{\mathrm{I}})$. Weiter gilt für jede aussagenlogische Formel A*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $[\![-]\!]_{\mathrm{I}}$ eine wohldefinierte Abbildung ist, also für eine beliebige aussagenlogische Formel A die Menge $[\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} \subseteq X$ offen ist. Dies folgt induktiv:
Für eine Atomformel p ist

$$[\![\overline{p}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\Box p]\!]_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}([\![p]\!]_{\mathrm{S4}})$$

offen. Dies bleibt auch unter Anwenden der Operatoren erhalten, denn für aussagenlogische Formeln A und B mit $[\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}}, [\![\overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} \subseteq X$ offen gilt:

- $[\![\overline{A \wedge B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\overline{A} \wedge \overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} \cap [\![\overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} \subseteq X$ offen
- $[\![\overline{A \vee B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\overline{A} \vee \overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} \cup [\![\overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} \subseteq X$ offen
- $[\![\overline{A \to B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\Box(\overline{A} \to \overline{B})]\!]_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}([\![\overline{A} \to \overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}}) \subseteq X$ offen
- $[\![\overline{\neg A}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\Box\neg\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}([\![\neg\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}}) \subseteq X$ offen

Weiterhin gelten

(TI-1) $\quad [\![\neg A]\!]_{\mathrm{I}} = [\![\Box\neg\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}([\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}}^{\mathsf{c}}) = \mathrm{int}([\![A]\!]_{\mathrm{I}}^{\mathsf{c}})$

(TI-2) $\quad [\![A \wedge B]\!]_{\mathrm{I}} = [\![\overline{A} \wedge \overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} \cap [\![\overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![A]\!]_{\mathrm{I}} \cap [\![B]\!]_{\mathrm{I}}$

(TI-3) $\quad [\![A \vee B]\!]_{\mathrm{I}} = [\![\overline{A} \vee \overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} \cup [\![\overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}} = [\![A]\!]_{\mathrm{I}} \cup [\![B]\!]_{\mathrm{I}}$

(TI-4) $\quad [\![A \to B]\!]_{\mathrm{I}} = [\![\Box(\overline{A} \to \overline{B})]\!]_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}([\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}}^{\mathsf{c}} \cup [\![\overline{B}]\!]_{\mathrm{S4}}) = \mathrm{int}([\![A]\!]_{\mathrm{I}}^{\mathsf{c}} \cup [\![B]\!]_{\mathrm{I}})$

(TI-5) $\quad [\![\bot]\!]_{\mathrm{I}} = [\![p \wedge \neg p]\!]_{\mathrm{I}} = [\![p]\!]_{\mathrm{I}} \cap [\![p]\!]_{\mathrm{I}}^{\mathsf{c}} = \varnothing$

(TI-6) $\quad [\![\top]\!]_{\mathrm{I}} = [\![\neg\bot]\!]_{\mathrm{I}} = [\![\bot]\!]_{\mathrm{I}}^{\mathsf{c}} = X$

also ist $(X, [\![-]\!]_{\mathrm{I}})$ ein topologisches I-Modell.
Es verbleibt die Äquivalenz der Gültigkeitsbegriffe zu zeigen. Für eine aussagenlogische Formel A gilt

$$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad [\![A]\!]_{\mathrm{I}} = X \quad \Leftrightarrow \quad [\![\overline{A}]\!]_{\mathrm{S4}} = X \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$ □

Für die umgekehrte Richtung ist die Formulierung etwas komplexer:

Satz 10. *Sei $\mathcal{M}_{\mathrm{I}} := (X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{I}})$ ein topologisches* I*-Modell. Wir definieren $\llbracket - \rrbracket_{\mathrm{S4}} : \mathbb{ML} \to \mathcal{P}(X)$ indem wir für jede Atomformel p*

$$\llbracket p \rrbracket_{\mathrm{S4}} := \llbracket p \rrbracket_{\mathrm{I}}$$

setzen und die Bewertungsfunktion gemäß (TS4-1) *bis* (TS4-8) *auf ganz $\mathbb{ML}$ fortsetzen.*
Dann ist $\mathcal{M}_{\mathrm{S4}} := (X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{S4}})$ ein topologisches S4*-Modell. Weiter gilt für jede aussagenlogische Formel A*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$

Beweis. Es folgt sofort aus der Definition von $\llbracket - \rrbracket_{\mathrm{S4}}$, dass $(X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{S4}})$ ein topologisches S4-Modell ist.
Der Beweis der Äquivalenz der Gültigkeitsbegriffe fußt auf folgenden Lemma:

Lemma 11. *Sei A eine beliebige aussagenlogische Formel. Dann gilt*

$$\llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt induktiv: Für jedes aussagenlogische Atom p gilt, da $\llbracket p \rrbracket_{\mathrm{I}} \subseteq X$ offen,

$$\llbracket \overline{p} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \llbracket \Box p \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}(\llbracket p \rrbracket_{\mathrm{S4}}) = \mathrm{int}(\llbracket p \rrbracket_{\mathrm{I}}) = \llbracket p \rrbracket_{\mathrm{I}} \,.$$

Sind A und B aussagenlogische Formeln, sodass $\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}} = \llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}}$ und $\llbracket B \rrbracket_{\mathrm{I}} = \llbracket \overline{B} \rrbracket_{\mathrm{S4}}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\llbracket \overline{A \wedge B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} &= \llbracket \overline{A} \wedge \overline{B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}} \cap \llbracket \overline{B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}} \cap \llbracket B \rrbracket_{\mathrm{I}} = \llbracket A \wedge B \rrbracket_{\mathrm{I}} \\
\llbracket \overline{A \vee B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} &= \llbracket \overline{A} \vee \overline{B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}} \cup \llbracket \overline{B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}} \cup \llbracket B \rrbracket_{\mathrm{I}} = \llbracket A \vee B \rrbracket_{\mathrm{I}} \\
\llbracket \overline{A \to B} \rrbracket_{\mathrm{S4}} &= \llbracket \Box(\overline{A} \to \overline{B}) \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}(\llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}}^{\mathsf{c}} \cup \llbracket \overline{B} \rrbracket_{\mathrm{S4}}) = \mathrm{int}(\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathsf{c}} \cup \llbracket B \rrbracket_{\mathrm{I}}) = \llbracket A \to B \rrbracket_{\mathrm{I}} \\
\llbracket \overline{\neg A} \rrbracket_{\mathrm{S4}} &= \llbracket \Box \neg \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = \mathrm{int}(\llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}}^{\mathsf{c}}) = \mathrm{int}(\llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathsf{c}}) = \llbracket \neg A \rrbracket_{\mathrm{I}}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung des Lemmas. ⊞

Nach Lemma 11 folgt für eine aussagenlogische Formel A

$$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad \llbracket A \rrbracket_{\mathrm{I}} = X \quad \Leftrightarrow \quad \llbracket \overline{A} \rrbracket_{\mathrm{S4}} = X \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$ □

Aus den letzten beiden Sätzen erhalten wir das zentrale Resultat zur Gödel-Übersetzung:

Satz 12. *Für jede aussagenlogische Formel A gilt*

$$\vdash_{\mathrm{I}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{S4}} \overline{A}$$

Beweis. Da nach den beiden Adäquatheitssätzen Satz 1 und Satz 2

$$\vdash_{\mathrm{I}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vDash_{\mathrm{TI}} A \qquad \text{und} \qquad \vdash_{\mathrm{S4}} \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$

reicht es aus zu zeigen, dass

$$\vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}.$$

Dies folgt, da

- $\Rightarrow$ Sei A eine aussagenlogische Formel mit $\vDash_{\mathrm{TI}} A$ und $\mathcal{M}_{\mathrm{S4}} := (X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{S4}})$ ein beliebiges topologisches S4-Modell. Nach Satz 9 existiert ein topologisches I-Modell $\mathcal{M}_{\mathrm{I}} := (X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{I}})$, sodass

  $$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$

  Da A topologisch I-gültig ist, gilt also $\mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$.

- $\Leftarrow$ Sei A eine aussagenlogische Formel mit $\vDash_{\mathrm{TS4}} A$ und $\mathcal{M}_{\mathrm{I}} := (X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{I}})$ ein beliebiges topologisches I-Modell. Nach Satz 10 existiert ein topologisches S4-Modell $\mathcal{M}_{\mathrm{S4}} := (X, \llbracket - \rrbracket_{\mathrm{S4}})$, sodass

  $$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} A \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{S4}} \vDash_{\mathrm{TS4}} \overline{A}$$

  Da A topologisch S4-gültig ist, gilt also $\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \vDash_{\mathrm{TI}} \overline{A}$ □

A. Anhang

Dieser Anhang enthält einige Inhalte des Proseminars zur einfacheren Referenzierung.

A.1. Hilbert-Kalkül für den Intuitionismus

Axiome:

(H1) $A \to (B \to A)$

(H2) $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(H3) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

(H4) $\neg A \to (A \to B)$

(H5) $A \land B \to A$

(H6) $A \land B \to B$

(H7) $A \to (B \to A \land B)$

(H8) $A \to A \lor B$

(H9) $B \to A \lor B$

(H10) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$

Regeln:

(MP) $A,\ A \to B \vdash_{\mathrm{I}} B$

Definitionen:

$$A \lor B :\equiv \neg A \to B$$

$$A \land B :\equiv \neg(\neg A \lor \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \land (B \to A)$$

$$\bot :\equiv p \land \neg p$$

$$\top :\equiv \neg\bot$$

A.2. Hilbert-Kalkül für S4

Axiome:

(A1) $A \to (B \to A)$

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

(K) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

(T) $\Box A \to A$

(4) $\Box A \to \Box\Box A$

Regeln:

(MP) $A,\ A \to B \vdash_{\mathrm{S4}} B$

(G) $\vdash_{\mathrm{S4}} A \Rightarrow \vdash_{\mathrm{S4}} \Box A$

Definitionen:

$$A \lor B :\equiv \neg A \to B$$

$$A \land B :\equiv \neg(\neg A \lor \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \land (B \to A)$$

$$\Diamond A :\equiv \neg\Box\neg A$$

$$\bot :\equiv p \land \neg p$$

$$\top :\equiv \neg\bot$$

A.3. Gödel-Übersetzung des Intuitionismus nach S4

Für eine aussagenlogische Formel A bezeichnen ist die Gödel-Übersetzung $\overline{A}$ rekursiv definiert durch

(i) $\overline{p} = \Box p$

(ii) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

(iii) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

(iv) $\overline{A \to B} = \Box(\overline{A} \to \overline{B})$

(v) $\overline{\neg A} = \Box \neg \overline{A}$

für p aussagenlogische Atomformel und A, B aussagenlogische Formeln.