

Knotenfärbbarkeit

via Wirtinger-Presentation

Tobias Hirsch

QED-Seminar Würzburg 2023

Die Färbbarkeit eines Knotens ist eine klassische Knotenvariante. Sie folgt direkt aus dem Satz über die Reidemeisterbewegungen von 1926 [Rei27]. Dieser Satz entstammt der historischen Knotentheorie, welche Knoten als endliche Polygonzüge im Raum betrachtet. Die moderne Sichtweise betrachtet Knoten jedoch als glatte Untermannigfaltigkeiten. Den Satz über die Reidemeisterbewegungen darin zu beweisen ist technisch und aufwendig¹. Möchte man also zeigen, dass Färbbarkeit eine Invariante von glatten Knoten ist, muss man einen alternativen Beweis finden. Die Idee dafür ist, die Färbungseigenschaften in Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen aus der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements zu übersetzen. Dieser Ansatz stammt von Ralph Fox, [CF77, p.93].

In der Entwicklung der allgemeinen Theorie folgen wir [Fri23, Chapters 69-70].

Inhaltsverzeichnis

1	Konventionen und Definitionen zu Knoten	2
2	Knotenfärbbarkeit – diagrammatisch	2
3	Fundamentalgruppe des Knotenkomplements	4
4	Knotenfärbbarkeit – gruppentheoretisch	5

¹In der Literatur wird der Beweis gerne einfach übersprungen. Einer der wenigen zufriedenstellenden Beweise für glatte Knoten findet sich in [OSS15, Appendix B.1].

1 Konventionen und Definitionen zu Knoten

Zu Beginn wollen wir kurz unsere Sichtweise auf die Knotentheorie fixieren:

Definition. Ein *Knoten* K ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $S^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, die diffeomorph zu S^1 ist.

Zwei Knoten K, J sind *äquivalent* oder *glatt isotop*, wenn eine glatte Isotopie von K nach J gibt, also eine glatte Abbildung $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3$, sodass

- $F(S^1 \times \{0\}) = K$ und $F(S^1 \times \{1\}) = J$
- $F_t: S^1 \rightarrow S^3$ für $t \in [0, 1]$ eine glatte Einbettung ist

Der *Unknoten* ist der Knoten $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$. Ein Knoten ist *trivial*, wenn er äquivalent zum Unknoten ist.

Eine wesentliche Rolle in den nachfolgenden Überlegungen werden Knotendiagramme spielen:

Definition. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq S^3$ ein Knoten und $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die Projektion. Es existiert ein zu K äquivalenter Knoten K' mit einem Diffeomorphismus $\varphi: S^1 \rightarrow K'$, sodass

- Für alle $a \in S^1$ ist $(p \circ \varphi)'(a) \neq 0$
- Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $\#(p \circ \varphi)^{-1}(\{x\}) \in \{0, 1, 2\}$
- Für alle $a \neq b \in S^1$ mit $(p \circ \varphi)(a) = (p \circ \varphi)(b)$ sind $(p \circ \varphi)'(a)$ und $(p \circ \varphi)'(b)$ linear unabhängig

Ein $x \in \text{im}(p \circ \varphi)$ mit $\#(p \circ \varphi)^{-1}(\{x\}) = 2$ heißt *Kreuzung*. Wir betrachten die Abbildung

$$c: \{\text{Kreuzungen}\} \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto \varphi^{-1}\left(\text{Das Element von } p^{-1}(\{x\}) \cap K' \text{ mit kleinerer } x_3\text{-Koordinate}\right)$$

Dann ist $(p \circ \pi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, c)$ ein *Knotendiagramm* für K . Das Bild einer Zusammenhangskomponente von $S^1 \setminus \text{im}(c)$ unter $p \circ \pi$ ist ein *Stränge* des Knotendiagramms.

Da in dieser Definition ein Knotendiagramm durch eine *Abbildung* gegeben ist, ist es immer orientiert – auch wenn der Knoten ursprünglich nicht orientiert war. Dies machen wir uns in folgender Definition zu nutze.

Definition. Sei $\mathfrak{D} = (\gamma, c)$ ein Knotendiagramm mit einer Kreuzung x mit $\gamma^{-1}(\{x\}) = \{a, b\}$, wobei $b \in \text{im}(c)$.

In einer kleinen Umgebung von x liegen genau drei Stränge o, u, u' . Wir sagen der eindeutige Strang o , der x enthält, *liegt oben* bei x , die anderen beiden *liegen unten*. Wir schreiben $x = (o|u, u')$. Die Kreuzung x heißt *positiv*, wenn $\{(p \circ \pi)'(a), (p \circ \pi)'(b)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine positive Basis ist. Ansonsten heißt x *negativ*.

Natürlich fehlen hier Beweise für wesentliche Eigenschaften dieser Definitionen – zum Beispiel für die Existenz von Knotendiagrammen. Für diese sei auf die Literatur verwiesen – eine sorgfältige Betrachtung findet sich in [Fri23, Chapter 70].

2 Knotenfärbbarkeit – diagrammatisch

Nach dieser Begriffsklärung wollen wir uns dem eigentlichen Inhalt zuwenden.

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir ein Knotendiagramm \mathfrak{D} . Eine *n-Färbung* von \mathfrak{D} ist eine Abbildung

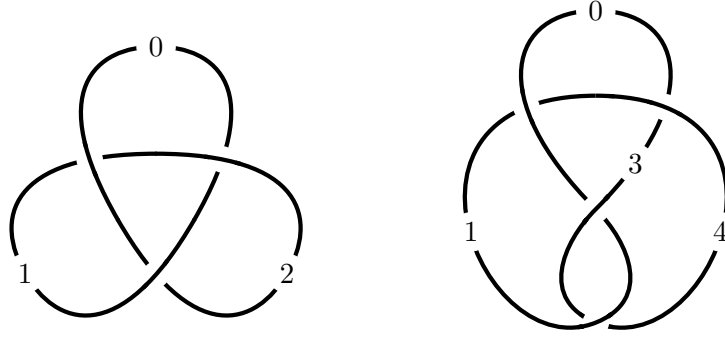
$$f: \{\text{Stränge von } \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, \dots, n-1\}$$

$$S \mapsto \text{Farbe von } S$$

sodass $2 \cdot f(o) = f(u) + f(u')$ bei allen Kreuzungen $x = (o|u, u')$. Eine *n-Färbung* ist *trivial*, wenn $\# \text{im}(f) = 1$.

Ein Knotendiagramm \mathfrak{D} heißt *n-färbbar*, wenn eine nicht-triviale *n-Färbung* von existiert. Ein Knoten K ist *n-färbbar*, wenn er ein *n-färbbares* Knotendiagramm besitzt.

Beispiele 2.1.



3-Färbung des Kleeblattknoten

5-Färbung des Achterknoten

Bemerkung. Wir betrachten n -Färbungen für kleines n :

- Kein Knoten ist 1-färbbar, da alle 1-Färbungen trivial sind.
- Kein Knoten ist 2-färbbar, da alle 2-Färbung trivial sind:

Die Färbbarkeitsbedingung impliziert bei 2-Färbungen, dass die Farben der unteren beiden Stränge an jeder Kreuzung gleich sind. Da Knotendiagramme ein Bild von S^1 sind, müssen somit alle Stränge die gleiche Farbe haben.

Im Folgenden wird es sich herausstellen, dass es einfacher ist Knotenfärbungen nur für Primzahlen zu betrachten. Die nächste Proposition erlaubt dies.

Proposition 2.2. Sei \mathfrak{D} ein Knotendiagramm und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathfrak{D} \text{ } n\text{-färbbar} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \text{ prim, } p \mid n : \mathfrak{D} \text{ } p\text{-färbbar}$$

Beweis.

„ \Rightarrow “ Es reicht aus zu zeigen, ist $n = a \cdot b$, so ist \mathfrak{D} a -färbbar oder b -färbbar.

Sei $f : \{\text{Stränge von } \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine nicht-triviale n -Färbung.

Fall 1: Es existieren Stränge S, S' mit $f(S) \not\equiv f(S') \pmod{a}$

Dann ist

$$\begin{aligned} g : \{\text{Stränge von } \mathfrak{D}\} &\rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \\ S &\mapsto f(S) \end{aligned}$$

eine nicht-triviale a -Färbung.

Fall 2: Für alle Stränge S, S' gilt $f(S) \equiv f(S') \pmod{a}$

Sei $c := f(S)$ für einen Strang S . Dann ist

$$\begin{aligned} g : \{\text{Stränge von } \mathfrak{D}\} &\rightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ S &\mapsto \frac{f(S) - c}{a} \end{aligned}$$

wohldefiniert. Die Abbildung g ist eine b -Färbung, da für jede Kreuzung $(o|u, u')$

$$2g(o) - g(u) - g(u') = 2 \cdot \frac{f(o) - c}{a} - \frac{f(u) - c}{a} - \frac{f(u') - c}{a} = \frac{2f(o) - f(u) - f(u')}{a} = 0$$

Da f nicht-trivial, existiert ein Strang S' mit $f(S') = n \cdot a + c$ und $0 \neq n < b$. Dann ist in $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$

$$g(S') = \frac{f(S') - c}{a} = n \neq 0 = g(S)$$

Also ist g nicht-trivial. Damit ist \mathfrak{D} b -färbbar.

3. Fundamentalgruppe des Knotenkomplements

„ \Leftarrow “ Sei p ein Primfaktor von n und $f: \{\text{Stränge von } \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine nicht-triviale p -Färbung. Dann ist

$$g: \{\text{Stränge von } \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$S \mapsto f(S) \cdot \frac{n}{p}$$

eine nicht-triviale n -Färbung, da für die Kreuzung $(o|u, u')$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$2g(o) - g(u) - g(u') = \frac{n}{p} \cdot \underbrace{(2f(o) - f(u) - f(u'))}_{\text{Vielfaches von } p} = 0$$

▲

Sucht man lange genug nach Beispielen für Knotenfärbungen – oder ist bereits mit ihren Eigenschaften vertraut – so findet man folgenden Satz:

Satz 2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Ein Knoten ist genau dann n -färbbar, wenn alle seine Diagramme n -färbbar sind.
- Äquivalente Knoten sind gleichzeitig n -färbbar, also ist n -Färbbarkeit eine Knoteninvariante.

Üblicherweise beweist man diesen Satz mithilfe des Satzes über die Reidemeisterbewegungen (siehe [Mur08, Chapter 5.6]) – wegen seiner schwierigen Beweisbarkeit für glatte Knoten, möchten wir diesen allerdings nicht verwenden. Stattdessen entwickeln wir im nächsten Abschnitt eine andere, rein topologische Sichtweise auf dieses Problem.

3 Fundamentalgruppe des Knotenkomplements

Mithilfe des Isotopie-Vortsetzungssatz aus der Differentialtopologie kann man glatte Isotopien einer Untermannigfaltigkeit zu einer Diffeotopie der umgebenden Mannigfaltigkeit fortsetzen. Dies impliziert insbesondere, dass die Komplemente glatt-isotoper Knoten diffeomorph sind. Die (differential-)topologischen Invarianten des Komplements eines Knoten sind also ein reicher Fundus an Knoteninvarianten. Im Folgenden interessieren wir uns besonders für die Fundamentalgruppe.

Satz 3.1. Seien K und J glatt-isotope Knoten. Dann ist $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus J)$.

Beweis. Sei $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ eine glatte Isotopie von K nach J . Nach dem Isotopie-Fortsetzungssatz (siehe [Fri23, Theorem 37.1]) existiert eine glatte Diffeotopie $G: S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ mit $G_0 = \text{id}$ und $G_1(K) = J$. Insbesondere ist $\Phi: S^3 \setminus K \rightarrow S^3 \setminus J$ ein Diffeomorphismus. ▲

Beispiel 3.2. Sei $U := \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq S^3$ der Unknoten. Dann ist $\{0\}^2 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq S^3$ ein Deformationsretrakt von $S^3 \setminus U$. Somit ist $\pi_1(S^3 \setminus U) \cong \mathbb{Z}$.

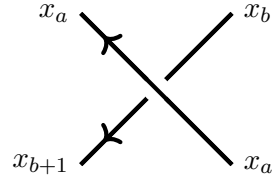
Ein expliziter Beweis für das letzte Beispiel ist bereits relativ aufwendig. Für beliebige Knoten erscheint es aussichtslos, die Fundamentalgruppe ihres Komplements bestimmen zu können. Der folgende Satz schafft hier Abhilfe.

Satz 3.3. Sei K ein Knoten mit Knotendiagramm \mathfrak{D} . Seien x_1, \dots, x_n die Stränge von \mathfrak{D} in der Reihenfolge der Orientierung von \mathfrak{D} . Wir setzen $x_0 := x_n$ und $x_{n+1} := x_1$. Seien k_1, \dots, k_m die Kreuzungen von m . Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k_i = (x_a | x_b, x_{b+1})$ sei

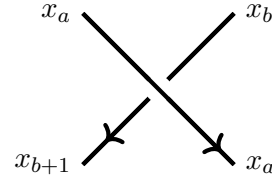
$$r_j := \begin{cases} x_a x_{b+1} x_a^{-1} x_b^{-1}, & \text{wenn } a_i \text{ positive Kreuzung} \\ x_a^{-1} x_{b+1} x_a x_b^{-1}, & \text{wenn } a_i \text{ negative Kreuzung} \end{cases}$$

Dann ist

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$



ergibt die Relation
 $x_a x_{b+1} x_a^{-1} x_b^{-1}$



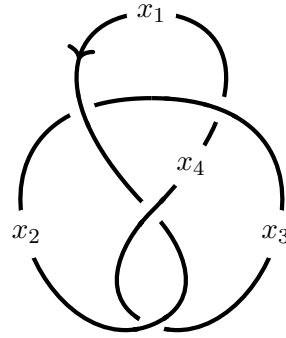
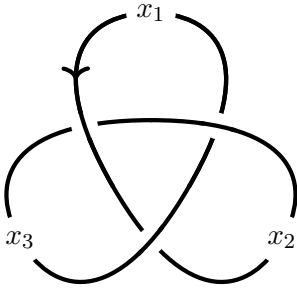
ergibt die Relation
 $x_a^{-1} x_{b+1} x_a x_b^{-1}$

Beweis. Für ein präzises Argument siehe [Fri23, Proposition 70.23]. ▲

Definition. Sei K ein Knoten. Die Darstellung von $\pi_1(S^3 \setminus K)$ aus Satz 3.3 heißt *Wirtinger-Darstellung*.

Bemerkung. In einem Knotendiagramm mit mindestens einer Kreuzung gibt es gleich viele Stränge und Kreuzungen, da jeder Strang an einer eindeutigen Kreuzung beginnt. In diesem Fall darf bei der Wirtinger-Darstellung eine der Relationen entfallen.

Beispiele 3.4. Wir bestimmen die Fundamentalgruppe des Komplements von Kleeblatt- und Achterknoten:



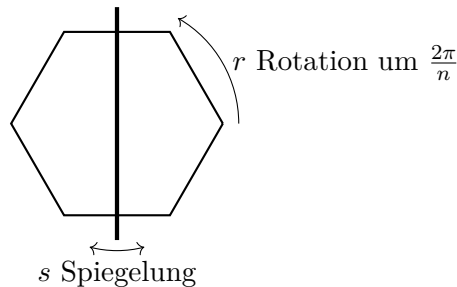
$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3^{-1} x_2 x_3 x_1^{-1}, x_2^{-1} x_1 x_2 x_3^{-1} \rangle \quad \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1 x_3 x_1^{-1} x_2^{-1}, x_4^{-1} x_2 x_4 x_1, x_2^{-1} x_4 x_2 x_3^{-1} \rangle$$

4 Knotenfärbbarkeit – gruppentheoretisch

Im Allgemeinen ist es unmöglich zu entscheiden, ob zwei gegebene Gruppendarstellungen isomorph sind. Eine Möglichkeit dies zu tun ist, zu untersuchen ob es nicht-triviale Abbildungen zu einer fixierten Gruppe gibt. Wir betrachten dafür insbesondere folgende Gruppen:

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die n -te Diedergruppe als $D_n := \langle r, s \mid r^n, s^2, sr sr \rangle$.

Anschaulich sind die Elemente von D_n für $n \geq 3$ die Symmetrien eines regulären n -Ecks



Da die Diedergruppen über eine Gruppendarstellung definiert sind, müssen wir zeigen, dass sie nicht-trivial sind.

Proposition 4.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in D_n$ existieren eindeutige $i \in \{0, \dots, n-1\}, j \in \{0, 1\}$ mit $x = r^i s^j$. Insbesondere ist

$$D_n = \langle r, s \mid r^n, s^2, sr sr \rangle = \{r^i s^j \mid i \in \{0, \dots, n-1\}, j \in \{0, 1\}\}$$

eine $2n$ -elementige Gruppe. Es ist $D_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, D_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$. Für $n \geq 3$ ist D_n nicht abelsch.

Beweis. Da $sr = r^{-1}$ ist jedes $x \in D_n$ von der Form $r^i s^j$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Da $r^n = s^2 = e$, kann $i \in \{0, \dots, n-1\}, j \in \{0, 1\}$ angenommen werden. Sei $r^i s^j = r^{i'} s^{j'}$. Durch betrachten der Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} D_n & \rightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ r & \mapsto & 1 \\ s & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} D_n & \rightarrow & \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \\ r & \mapsto & 0 \\ s & \mapsto & 1 \end{array}$$

folgt $i \equiv i' \pmod{n}$ und $j \equiv j' \pmod{2}$. ▲

Nun haben wir genug allgemeine Theorie entwickelt, um zu Knotenfärbungen zurückkehren zu können:

Proposition 4.2. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und K ein Knoten. Es gilt

- Ist K p -färbbar, so existiert ein Epimorphismus $\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow D_p$.
- Existiert ein Epimorphismus $\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow D_p$, so ist jedes Knotendiagramm von K p -färbbar.

Beweis. Sei K p -färbbar. Dann existiert ein p -färbbares Knotendiagramm \mathfrak{D} für K . Wir betrachten die Wirtinger-Darstellung von $\pi_1(S^3 \setminus K)$, die aus \mathfrak{D} resultiert

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

Sei $f: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine nicht-triviale Färbung für \mathfrak{D} . Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi: \pi_1(S^3 \setminus K) &\rightarrow D_p \\ x_i &\mapsto sr^{f(x_i)} \end{aligned}$$

ein wohldefinierte Homomorphismus, da für jede Kreuzung $(o|u, u')$

$$\begin{aligned} \varphi(o^{\pm 1} u' o^{\mp 1} u) &= (sr^{f(o)})^{\pm 1} (sr^{f(u')}) (sr^{f(o)})^{\mp 1} (sr^{f(u)})^{-1} \\ (sr^k)^{-1} &= r^{-k} s = sr^k \\ &\stackrel{\downarrow}{=} (sr^{f(o)}) (sr^{f(u')}) (sr^{f(o)}) (sr^{f(u)}) \\ sr^k &= r^{-k} s \\ &\stackrel{\downarrow}{=} r^{-f(o)+f(u')-f(o)+f(u)} = e \end{aligned}$$

Da f nicht-trivial, existieren $a, b \in \text{im}(f)$ mit $a \neq b$. Somit sind $sr^a, sr^b \in \text{im}(\varphi)$. Nach **Proposition 4.1** ist $sr^a \neq sr^b$. Damit enthält $\text{im}(\varphi)$ zwei Elemente der Ordnung 2. Da $\#\text{im}(f) \mid \#D_p = 2p$ und p prim, folgt $\text{im}(f) = D_n$.

Sei $\varphi: \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow D_n$ ein Epimorphismus und \mathfrak{D} ein Knotendiagramm für K . Wir betrachten wiederum die Wirtinger-Darstellung von $\pi_1(S^3 \setminus K)$, die aus \mathfrak{D} resultiert

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

Wir identifizieren wieder $x_0 := x_n, x_{n+1} := x_1$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann existiert eine Kreuzung $(x_a|x_i, x_{i+1})$. Somit gilt $x_a^{\pm 1} x_{i+1} x_a^{\mp 1} x_i = e$, also sind x_i und x_{i+1}^{-1} konjugiert. Damit sind auch $\varphi(x_i)$ und $\varphi(x_{i+1})$ konjugiert und es gilt $\text{ord}(x_i) = \text{ord}(x_{i+1})$. Somit ist $\text{ord}(\varphi(x_i)) = \text{ord}(\varphi(x_j))$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Nach dem Satz von Lagrange ist $\text{ord}(x_i) \in \{1, 2, p, 2p\}$. Nach **Proposition 4.1** ist D_p nicht zyklisch, also $\text{ord}(x_i) \neq 2p$. Da φ ein Epimorphismus ist, $\text{ord}(\varphi(x_i)) \neq 1$. Angenommen $\text{ord}(\varphi) = p$. Dann

ist $\text{im}(\varphi) \subseteq \langle r \rangle$, also ist φ kein Epimorphismus. Widerspruch! Also gilt $\text{ord}(\varphi(x_i)) = 2$. Nach **Proposition 4.1** existiert $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\varphi(x_i) = sr^{a_i}$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \{x_1, \dots, x_n\} &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x_i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Da φ Epimorphismus, ist $\#\text{im}(f) \geq 2$. Zudem gilt für eine Kreuzung $(x_a | x_i, x_{i+1})$

$$r^{f(x_i)+f(x_j)-2f(x_a)} = \left(sr^{f(o)}\right)^{\pm 1} \left(sr^{f(u')}\right) \left(sr^{f(o)}\right)^{\mp 1} \left(sr^{f(u)}\right)^{-1} = \varphi(x_a^{\pm 1} x_{i+1} x_a^{\mp 1} x_i^{-1}) = e$$

da $x_a x_{i+1} x_a^{-1} x_i^{-1}$ oder $x_a^{-1} x_{i+1} x_a x_i^{-1}$ eine Relation der Wirtinger-Darstellung ist. Damit gilt

$$p \mid f(x_i) + f(x_j) - 2f(x_a),$$

also $f(x_i) + f(x_j) - 2f(x_a) = 0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Somit ist f eine nicht-triviale p -Färbung. ▲

Damit können wir nun **Satz 2.3** beweisen:

Satz 2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Ein Knoten ist genau dann n -färbbar, wenn alle seine Diagramme n -färbbar sind.
- Äquivalente Knoten sind gleichzeitig n -färbbar, also ist n -Färbbarkeit eine Knoteninvariante.

Beweis. Für n prim folgt die Behauptung aus **Proposition 4.2**. Damit folgt die Behauptung für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ aus **Proposition 2.2**. ▲

Literatur

- [CF77] Richard H. Crowell und Ralph H. Fox. *Introduction to Knot Theory*. Springer New York, 1977.
- [Fri23] Stefan Friedl. *Script for Algebraic Topology*.
friedl.app.uni-regensburg.de/papers/1at-total-public-july-9-2023.pdf
www.ams.org/open-math-notes/omn-view-listing?listingId=111368. 2023.
- [Mur08] Kunio Murasugi. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser Boston, 2008.
- [OSS15] Peter S. Ozsváth, András Stipsicz und Zoltán Szabó. *Grid Homology for Knots and Links*. AMS Mathematical Surveys and Monographs 208. American Mathematical society, 2015.
- [Rei27] Kurt Reidemeister. „Elementare Begründung der Knotentheorie“. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* Jg. 5, Nr. 1, S. 24–32, 1927.