Henkelzerlegungen und die Klassifikation glatter Flächen

Tobias Hirsch

QED-Seminar Ingolstadt

Verkleben topologischer Räume

Definition

Seien X und Y topologische Räume, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $\varphi \colon A \to Y$ stetig. Wir definieren

$$X \cup_\varphi Y := X \cup_{A \xrightarrow{\varphi} Y} Y := (X \sqcup Y)/\sim$$

wobei $\sim$ die von $a \sim \varphi(a)$ für $a \in A$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Wir sagen $X \cup_\varphi Y$ entsteht durch *ankleben von* X *and* Y *entlang von* φ.

Henkelanklebungen

Definition

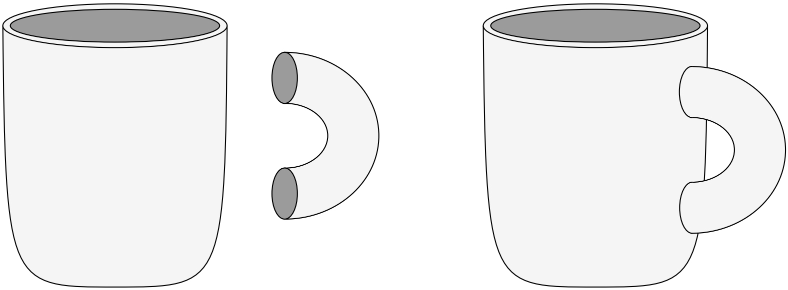
Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, $k \in \{0, \dots, n\}$ und $\varphi \colon \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1} \to \partial M$ eine glatte Einbettung[a]. Wir definieren

$$M \cup_\varphi h^k := M \cup_{\partial M \xleftarrow{\varphi} \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1}} (\overline{B}^{n-k} \times \overline{B}^k)$$

und sagen $M \cup_\varphi h^k$ entsteht durch *ankleben eines k-Henkels and M entlang von* φ. Wir nennen φ die *Anklebeabbildung* des k-Henkels und k der *Index* des k-Henkels.

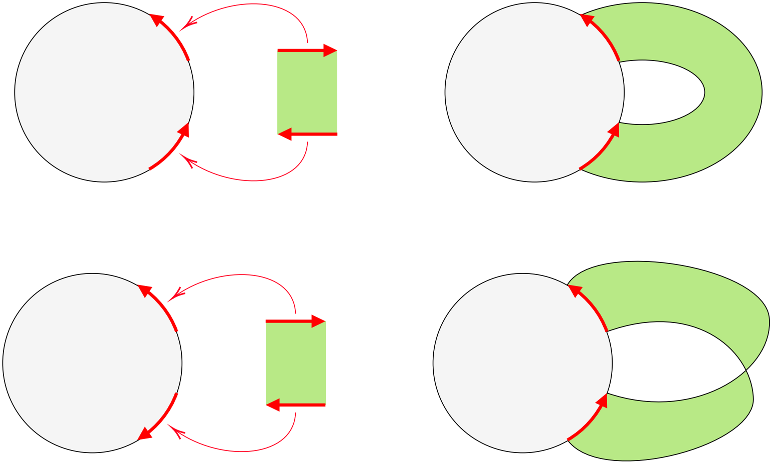
[a] Dabei ist $S^{-1} := \varnothing$.

Beispiele



Ankleben des Henkels einer Kaffeetasse

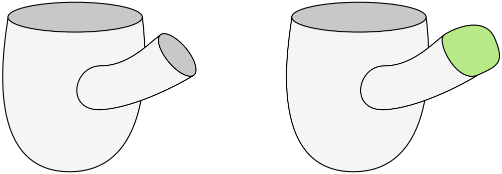
Beispiele



Zwei verschiedene Möglichkeiten einen 1-Henkel an eine Kreisscheibe zu kleben.

Randfälle

- Ankleben eines 0-Henkels entsprecht der disjunkten Vereinigung mit einem Ball (der entsprechenden Dimension).
- Ankleben eines n-Henkels an eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit klebt einen n-Ball an eine Randkomponente.



Ankleben eines 2-Henkels and eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit

Henkelanklebungen bleiben Mannigfaltigkeiten

Proposition

Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1} \to \partial M$ eine glatte Einbettung mit $k \in \{0, \ldots, n\}$.

1.
   - *Der topologische Raum $M \cup_\varphi h^k$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.*
   - *Jede Wahl eines Kragens $\Theta\colon [0,1] \times \partial M \to M$ gibt $M \cup_\varphi h^k$ kanonisch eine n-dimensionale glatte Struktur, sodass M und $\overline{B}^{n-k} \times \overline{B}^k$ beides glatte Untermannigfaltigkeiten mit Ecke $\varphi\left(S^{n-k-1} \times S^{k-1}\right)$ sind. Jede Wahl eines Kragens führt einer diffeomorphen glatten Struktur auf $M \cup_\varphi h^k$.*
2. *$M \cup_\varphi h^k$ ist kompakt.*
3. *Der Rand der glatten Mannigfaltigkeit $M \cup_\varphi h^k$ ist*

$$\partial(M \cup_\varphi h^k) = \left(\partial M \setminus \varphi\left(\overline{B}^{n-k} \times S^{k-1}\right)\right) \cup_{\varphi|_{S^{n-k-1} \times S^{k-1}}} \left(S^{n-k-1} \times \overline{B}^k\right)$$

Henkelzerlegungen

Definition

Eine *Henkelzerlegung* einer kompakten n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit ist ein Diffeomorphismus

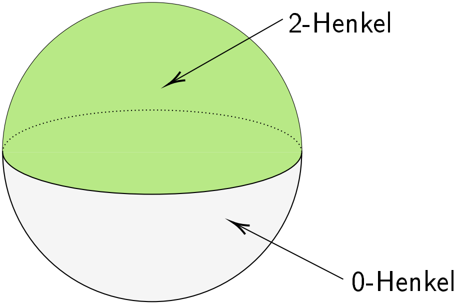
$$\Theta\colon M \to \varnothing \cup_{\varphi_1} h^{k_1} \cup_{\varphi_2} \cdots \cup_{\varphi_m} h^{k_m}$$

wobei φ_i die Anklebeabbildung des k_i-Henkels h^{k_i} nach $\varnothing \cup_{\varphi_1} h^{k_1} \cup_{\varphi_2} \cdots \cup_{\varphi_{i-1}} h^{k_{i-1}}$ ist für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Bemerkung

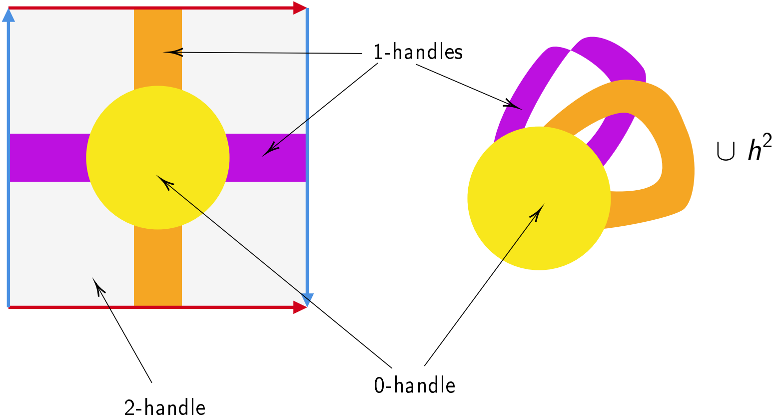
- Der erste Henkel h^{k_1} ist ein 0-Henkel.
- Bei einer *geschlossenen* n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist der letzte Henkel h^{k_m} ein n-Henkel.

Beispiele



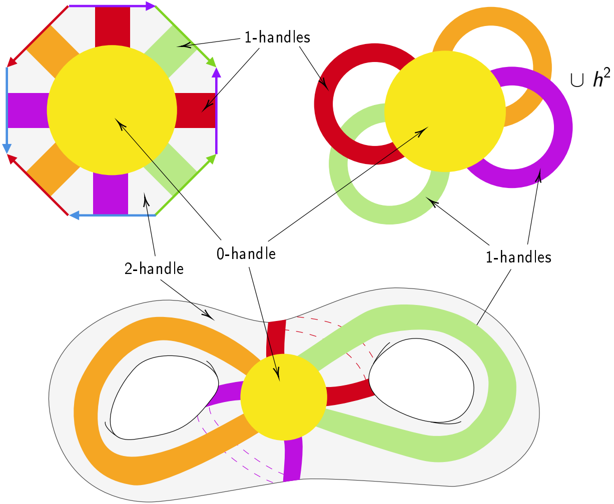
Kugeloberfläche

Beispiele



Kleinsche Flasche

Beispiele



Fläche vom Geschlecht 2

Zusammenhang von Henkelanklebungen

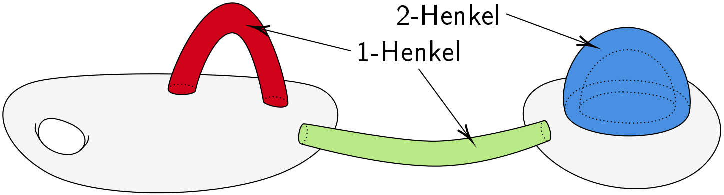
Proposition

Für eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M und eine glatte Einbettung $\varphi\colon \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1} \to \partial M$ gilt

$k = 0$: $\#\pi_0(M \cup h^k) = \#\pi_0(M) + 1$

$k = 1$:
$$\#\pi_0(M \cup h^k) = \begin{cases} \#\pi_0(M), & \mathrm{im}(\varphi) \subseteq \textit{eine Komponente von } M \\ \#\pi_0(M) - 1, & \textit{sonst} \end{cases}$$

$k \geq 2$: $\#\pi_0(M \cup h^k) = \#\pi_0(M)$

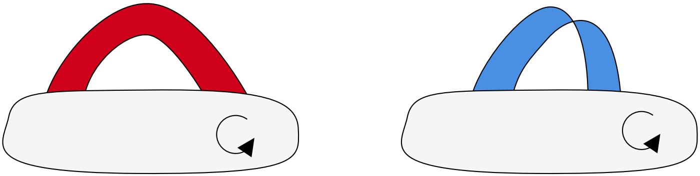


Orientierbarkeit von Henkelanklebungen

Definition

Sei M eine kompakte orientierte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon \overline{B}^{n-1} \times S^0 \to \partial M$ eine glatte Einbettung. Wir wählen eine Orientierung auf $\overline{B}^{n-1} \times \overline{B}^1$ und betrachten $\overline{B}^{n-1} \times S^0$ mit der Randorientierung. Wir nennen φ und die 1-Henkelanklebung entlang φ *orientierbar* falls φ orientierungserhaltend oder -umkehrend ist. Sonnst nennen wir sie *nicht orientierbar*.

orientierbar nicht orientierbar



Proposition

Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1} \to \partial M$ eine glatte Einbettung. Falls M orientiert ist, gilt

$k = 0$: *Es existiert eine Orientierung auf $M \cup_\varphi h^k$ die mit der Orientierung auf M übereinstimmt.*

$k = 1$: *Ist φ orientierbar, so existiert eine Orientierung auf $M \cup_\varphi h^k$ die mit der Orientierung auf M übereinstimmt.*
Ist φ nicht-orientierbar und nimmt Werte in genau einer Komponente von M an, so ist $M \cup_\varphi h^k$ nicht orientierbar.
Ist φ nicht-orientierbar und nimmt Werte in mehreren Komponenten von M an, so ist $M \cup_\varphi h^k$ orientierbar, aber keine Orientierung stimmt mit der auf M überein.

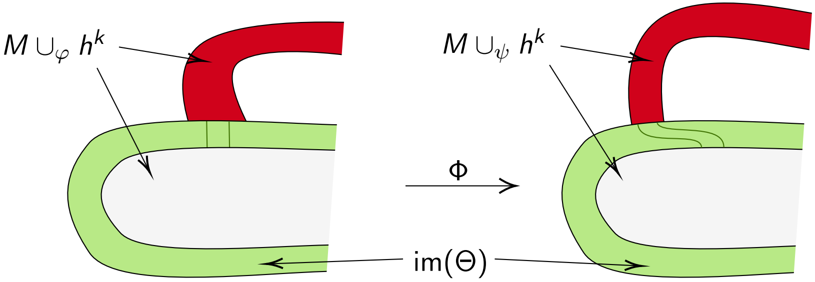
$k \geq 2$: *Es existiert eine Orientierung auf $M \cup_\varphi h^k$ die mit der Orientierung auf M übereinstimmt.*

Ist M nicht orientierbar, so ist auch $M \cup_\varphi h^k$ nicht orientierbar.

Henkelverschiebungen

Proposition

Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Sind $\varphi, \psi \colon \overline{B}^{n-k} \times S^{k-1} \to \partial M$ glatte Einbettungen, die glatt isotop sind, so sind $M \cup_\varphi h^k$ und $M \cup_\psi h^k$ diffeomorph.



Standard Henkelzerlegungen

Definition

Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit einer Henkelzerlegung, deren Indizes monoton steigen:

$$M = \varnothing \cup_{\varphi_{0,1}} h^0 \cup_{\varphi_{0,2}} \cdots \cup_{\varphi_{0,r_0}} h^0 \cup \cdots \cup_{\varphi_{n,1}} h^n \cup_{\varphi_{n,2}} \cdots \cup_{\varphi_{n,r_n}} h^n$$

Wir nennen

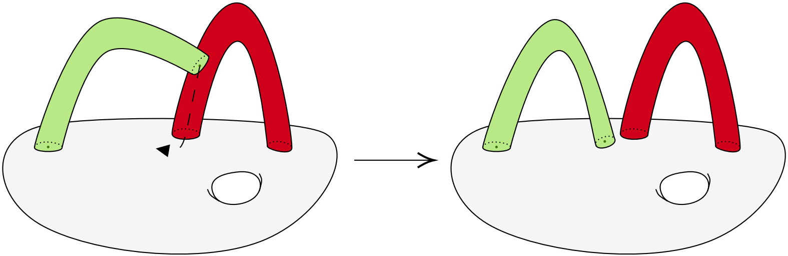
$$M^i := \varnothing \cup_{\varphi_{0,1}} h^0 \cup_{\varphi_{0,2}} \cdots \cup_{\varphi_{0,r_0}} h^0 \cup \cdots \cup_{\varphi_{i,1}} h^i \cup_{\varphi_{i,2}} \cdots \cup_{\varphi_{i,r_i}} h^i$$

Das *i-Skelett der Henkelzerlegung*. Die Henkelzerlegung ist *standard* falls $\mathrm{im}(\varphi_{i,j}) \subseteq \partial M^{i-1}$ für $i \in \{0, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, r_i\}$

Standard Henkelzerlegungen

Korollar

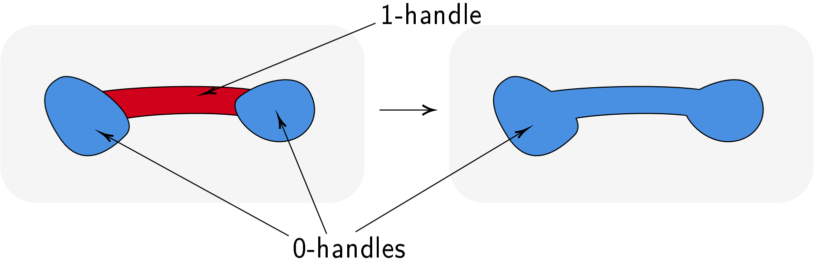
Sei M eine kompakte n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Falls M eine Henkelzerlegung erlaubt, dann erlaubt M auch eine standard Henkelzerlegung mit der selben Anzahl von Henkeln pro Index.



Komplett-standard Henkelzerlegung

Proposition

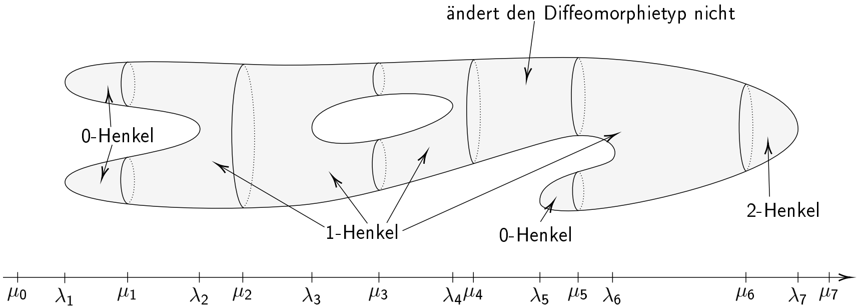
Sei M eine geschlossene, zusammenhängende, nicht-leere n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit einer standard Henkelzerlegung. Dann hat M auch eine standard Henkelzerlgeung mit genau einem 0-Henkel und genau einem n-Henkel.



Existenz von Henkelzerlegungen

Theorem

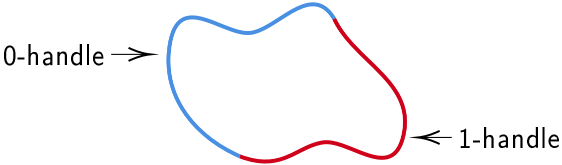
Jede geschlossenen Mannigfaltigkeit hat eine komplett-standard Henkelerlegung.

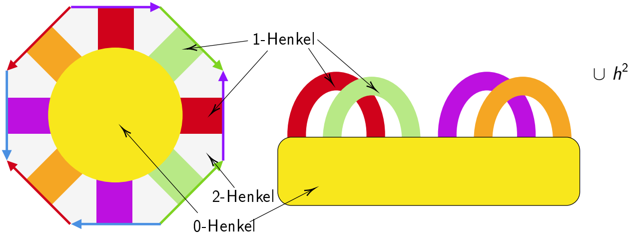


Der 1-dimensionale Fall

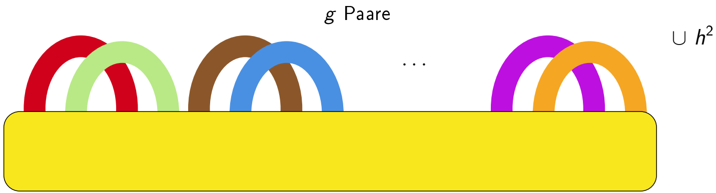
Lemma

Jede geschlossene, zusammenhängende, nicht-leere 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist diffeomorph zu S^1.



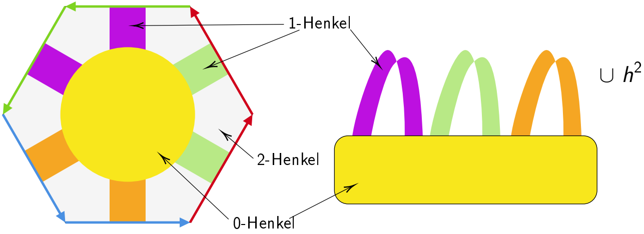


Henkelzerlegung der orientierbaren Fläche vom Geschlecht 2

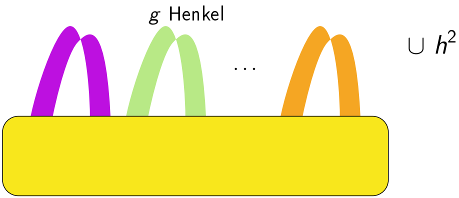


Henkelzerlegung der orientierbaren Fläche vom Geschlecht g

Henkelzerlegung nicht orientierbarer Flächen



Henkelzerlegung der nicht orientierbaren Fläche vom Geschlecht 3



Henkelzerlegung der nicht orientierbaren Fläche vom Geschlecht g

Klassifikation glatter Flächen

Theorem

Sei M eine geschlossene, zusammenhängende, nicht-leere 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

- *Ist M orientierbar, so ist M diffeomorph zur orientierbaren Fläche vom Geschlecht g für ein $g \in \mathbb{N}_0$*
- *Ist M nicht orientierbar, so ist M diffeomorph zur nicht orientierbaren Fläche von Geschlecht g für ein $g \in \mathbb{N}$.*

Anklebeabbildung von 2-Henkeln

Lemma

Sei M eine kompakte, zusammenhängende, nicht-leere 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, C eine Randkomponente von M und $\varphi, \psi \colon \overline{B}^0 \times S^1 \to C$ Diffeomorphismen. Dann sind $M \cup_\varphi h^2$ und $M \cup_\psi h^2$ diffeomorph.

Henkelzerlegung der verbundenen Summe

Lemma

Seien $I, J \subseteq \partial\overline{B}^2 \cong S^1$ *disjunkt, kompakt, zusammenhengend und nicht-leer. Seien* M *und* N *geschlossene, zusammenhängende, nicht-leere 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit komplett-standard Henkelzerlegungen*

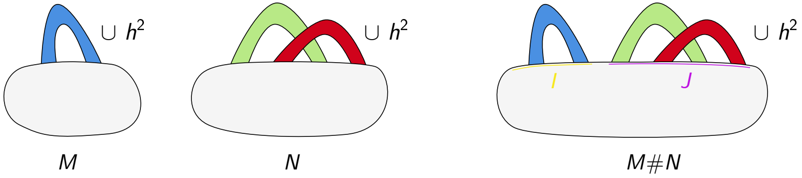
$$M = \varnothing \cup h^0 \cup_{\varphi_1} h^1 \cup_{\varphi_2} \cdots \cup_{\varphi_n} h^1 \cup h^2$$
$$N = \varnothing \cup h^0 \cup_{\psi_1} h^1 \cup_{\psi_2} \cdots \cup_{\psi_m} h^1 \cup h^2$$

sodass $\mathrm{im}(\varphi_1), \ldots, \mathrm{im}(\varphi_n) \subseteq I$ *und* $\mathrm{im}(\psi_1), \ldots, \mathrm{im}(\psi_m) \subseteq J$. *Falls* M *und* N *orientierbar sind, müssen sie orientiert sein. Dann ist*

$$M \# N = \varnothing \cup h^0 \cup_{\varphi_1} h^1 \cup_{\varphi_2} \cdots \cup_{\varphi_n} h^1 \cup_{\psi_1} h^1 \cup_{\psi_2} \cdots \cup_{\psi_m} h^1 \cup h^2.$$

eine komplett-standard Henkelzerlegung.

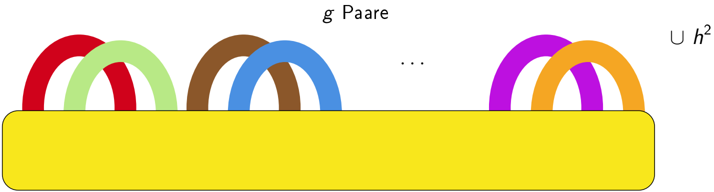
Henkelzerlegung der verbundenen Summe



Klassifikation orientierbarer Flächen

Theorem

Sei M eine geschlossene, zusammenhängende, nicht-leere, orientierbare 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist M diffeomorph zur orientierbaren Fläche vom Geschlecht g für ein $g \in \mathbb{N}_0$.



Henkelzerlegung der orientierbaren Fläche vom Geschlecht g