Polygone in Jordankurven

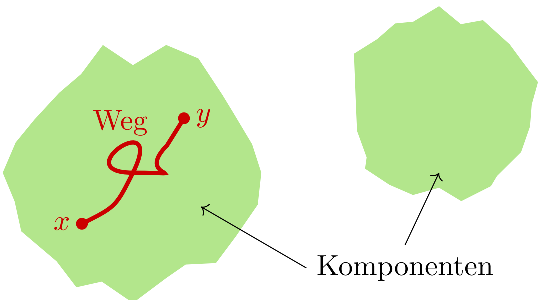
Tobias Hirsch

QED-Seminar Regensburg 2026

1 Jordankurven

Im ersten Teil wollen wir uns dem Jordanschen Kurvensatz widmen. Bevor wir ihn formulieren können, benötigen wir einige Definitionen. Dabei wird uns immer wieder der Begriff „stetig“ begegnen. Wir werden „stetig“ nicht präzise definieren, für unsere Belange ist die intuitive Idee „etwas ist stetig, wenn ich es in einem Zug durchzeichnen kann“ ausreichend – insbesondere da wir uns nur in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bewegen werden.

Definition. Seien $x, y \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Ein *Weg von x nach y in A* ist eine stetige Abbildung $w\colon [0,1] \to A$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist *zusammenhängend*, wenn für all $x, y \in A$ ein Weg von x nach y in A existiert.
Die *Komponente* von A sind die zusammenhängenden Teilmengen von A, welche in keiner größeren zusammenhängenden Teilmenge von A enthalten sind.



Ein Weg muss nicht injektiv sein, sondern darf sich selbst schneiden. Bei einer Jordankurve wird dies ausgeschlossen:

Definition. Eine *Jordankurve* ist das Bild eines Wegs $w\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ von einem Punkt zu sich selbst, der auf $[0,1)$ injektiv ist.

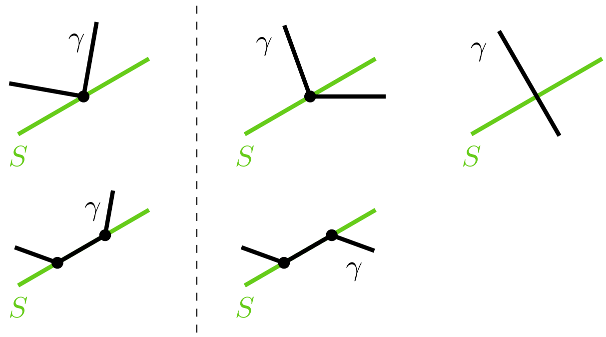
In anderen Worten ist eine Jordankurve das Bild eines Wegs von einem Punkt zu sich selbst, der sich nicht schneidet. Jetzt können wir den Jordanschen Kurvensatz formulieren:

Satz 1 (Jordanscher Kurven Satz). *Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordankurve. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ genau zwei Komponenten.*

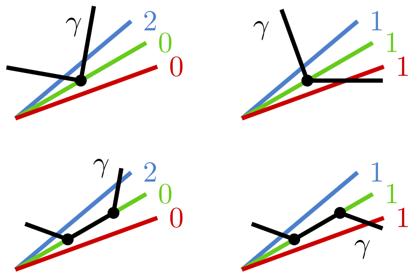
Wir werden nur einen Beweis für polygonale Jordankurven geben.

Definition.
- Sei $n \geq 1$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein *Polygon*, wenn es Punkte $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass A die Vereinigung der Strecken $[e_1, e_2], \dots, [e_{n-1}, e_n], [e_n, e_1]$ ist.
- Eine Jordankurve ist *polygonal*, wenn sie ein Polygon ist.
- Ein Weg $w\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist *polygonal*, wenn es $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $w([0,1])$ die Vereinigung der Strecken $[e_1, e_2], \dots, [e_{n-1}, e_n]$ ist.

Beweis für polygonale Jordankurven[1]. Sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ und $S \coloneqq \{p + \lambda v \mid \lambda \geq 0\}$ für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Strahl mit Anfangspunkt p. Sei C eine Komponente von $S \cap \gamma$. Dann ist C ein einzelner Punkt oder eine Vereinigung von Seiten des Polygons γ. Genauer haben wir folgende fünf Fälle:



In den rechten drei Fällen ist C ein Schnitt von S und γ. Rotiert man S um p, so bleibt die Parität der Schnitte von S und γ unverändert:



Sei also $s_p \in \{0, 1\}$ diese Parität. Ist $[p, q] \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, so gibt es einen Strahl bei p auf dem q liegt und es folgt, dass $s_p = s_q$. Aus der folgenden Behauptung folgt somit, dass s_p für Punkte in der gleichen Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ gleich ist:

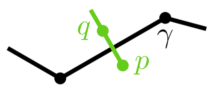
Behauptung. *Sind $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ in derselben Komponente, so existiert ein Polygonzug von p nach q.*

Beweisidee. Sei $w \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ ein Weg von p nach q. Die Menge

$$X \coloneqq \{t \in [0, 1] \mid \text{ es gibt einen polygonalen Weg von } p \text{ nach } w(t)\}$$

hat ein „Supremum“ s, also eine kleinste obere Schranke. Da γ und der Weg „kompakt“ sind, gibt es sein $d > 0$, sodass $|a - b| > d$ für alle $a \in \gamma$ und b auf diesem Weg. Damit ist um jeden Punkt auf w auch die berandete Scheibe mit Radius d um w in $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ enthalten. Durch Betrachten der Scheibe mit Radius d um s folgt, dass $s = 1$. △

Betrachte nun einen Punkte p, q nahe auf beiden Seiten einer Kante des Polygons γ.



Es gibt einen Strahl bei p durch q der γ in genau einem Punkt schneidet, also ist $s_p \neq s_q$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ hat mindestens zwei Komponenten.
Von einem beliebigen Punkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ findet man einen Weg zu p oder q, indem man in Richtung der Jordankurve geht und dieser dann folgt. Somit hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ genau zwei Komponenten. ▲

[1] Ein Beweis für „analytische“ Jordankurven kann im Wesentlichen analog geführt werden. Es muss dann jedoch zusätzlich gezeigt werden, dass die Anzahl der Komponenten des Schnitts einer Geraden mit der Jordankurve endlich ist. Dies ist für „glatte“ Kurven nicht möglich, da $e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x})$ eine glatte Funktion mit unendlich vielen Nullstellen in $[-1, 1]$ ist. Stattdessen kann über Transversalität argumentiert werden. Der Beweis für die allgemeine, topologische Aussage benötigt mehr Ideen. Üblicherweise wird er via Homologie geführt.

2 Einschreiben von n-Ecken

Im zweiten Teil untersuchen wir, welche Polygone sich in Jordankurven einschreiben lassen:

Definition. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei $n \geq 1$ minimal, sodass Punkte $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^2$ existiert für die P die Vereinigung der Strecken $[e_1, e_2], \ldots, [e_{n-1}, e_n], [e_n, e_1]$ ist. Dann ist P ein *n-Eck* mit *Ecken* $e_1, \ldots, e_n$ und *Seiten* $[e_1, e_2], \ldots, [e_{n-1}, e_n], [e_n, e_1]$.
Zwei n-Ecke P, P' sind *ähnlich*, wenn sie durch Verschieben, Drehen, Spiegeln und Skalieren auseinander hervorgehen.
Ein n-Eck P kann in eine Jordankurve γ *eingeschrieben* werden, wenn es ein n-Eck mit Ecken auf γ gibt, das ähnlich zu P ist.

Wir werden der Reihe nach betrachten, welche n-Ecke sich in alle Jordankurven einschreiben lassen. Die erste Beobachtung ist, dass dies ab Fünfecken nicht der Fall ist:

Satz 2. *Sein P ein n-Eck mit $n \geq 5$. Dann existiert eine Jordankurve in die P nicht eingeschrieben werden kann.*

Beweis. Die Menge der Winkel zwischen zwei Seiten des Polygons ist endlich. Somit lässt sich P nicht in ein Dreieck, dessen Innenwinkel nicht in dieser Menge liegen, einschreiben.
Mit mehr Technologie lässt sich auch folgender Ansatz verfolgen: Fünf Punkte in $\mathbb{R}^2$ legen einen eindeutigen Kegelschnitt fest. Somit kann P nicht in zwei verschiedene Ellipsen eingeschrieben werden. ⟁

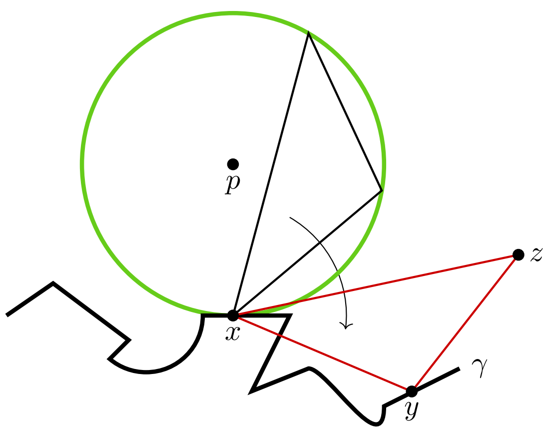
Mit einer elementaren, topologischen Konstruktion auf Basis des Jordanschen Kurvensatz kann jedes Dreieck in jede Jordankurve eingeschrieben werden:

Satz 3. *Jedes Dreieck lässt sich in jede Jordankurve einschreiben.*

Beweis. Sei D ein Dreieck und γ eine Jordankurve. Nach dem Jordanschen Kurvensatz hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ zwei Komponenten A und B. Ohne Einschränkung enthält B Punkte, die beliebig weit vom Ursprung entfernt sind, ist also *unbeschränkt*. Sei $p \in A$ und $x \in \gamma$ mit

$$\|x - p\| = \min\{\|a' - p\| \mid a' \in \gamma\}.$$

Da jedes Dreieck einen Umkreis besitzt, existiert ein zu D ähnliches Dreieck mit einer Ecke bei x und den anderen beiden Ecken in $A \cup \gamma$, sodass x die einer längsten Seite gegenüberliegende Ecke ist. Nach geeigneten Drehen um x kann, da $B \cup \{x\}$ zusammenhängend und unbeschränkt ist, angenommen werden, dass eine weitere Ecke y ebenfalls auf γ liegt und die dritte, z, noch immer in $A \cup \gamma$ bleibt.



Bewege nun x, y entlang γ, sodass am Ende der Abstand von x, y der größtmögliche zwischen zwei Punkten auf γ ist. Dann muss z in $B \cup \gamma$ liegen, da $[xy] \leq [yz]$. Somit beschreibt z bei dieser Bewegung einen Weg von A nach B. Damit muss z zwischendurch auf γ gelegen haben. ⟁

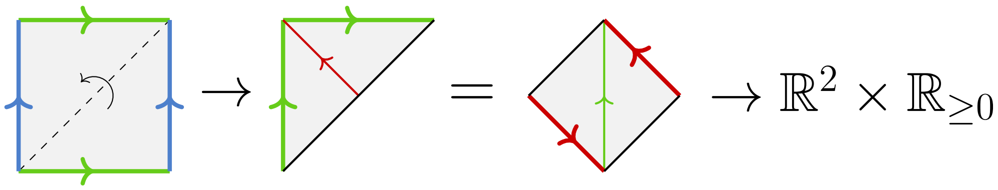
Hier können wir den Ausgangspunkt x nicht beliebig wählen: In ein stumpfwinkliges, gleichseitiges Dreieck γ lässt sich kein gleichseitiges Dreieck einschreiben, das eine der Ecken bei einem der spitzen Winkel von γ hat. Nach Meyerson [Mey80] gibt es jedoch immer höchstens zwei Punkte auf einer Jordankurve, bei denen ein fixiertes Dreieck nicht eingeschrieben werden kann.
Es verbleibt Vierecke zu betrachten. Hier ist die Frage deutlich komplexer, da die Freiheitsgrade, die Ähnlichkeit zu einem Viereck erlaubt, genau mit den Freiheitsgraden für Konfigurationen von vier Punkten auf einer Jordankurve zusammenfallen[2]. Wir betrachten deshalb die einfachere Frage, ob sich in jede Jordankurve irgendein Rechteck (ohne Festlegung des Seitenverhältnisses) einschreiben lässt.

Satz 4 (Vaughan [Vau77]). *In jede Jordankurve lässt sich ein Rechteck einschreiben.*

Beweis. Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordankurve. Betrachte die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon \gamma^2 &\to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \|a-b\| \right). \end{aligned}$$

Sie ist definiert auf einem Torus. Für alle $x, y \in \gamma^2$ gilt $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$. Somit „faltet“ Φ den Torus zunächst und bildet dann den verbleibenden Raum nach $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ab.



Dieser verbleibende Raum ist ein Möbiusband M. Der Rand ∂M von M entsteht aus der Diagonale von γ^2. Er wird also nach $\gamma \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ abgebildet. Zudem wird kein Punkt aus dem Inneren $M \setminus \partial M$ nach $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ abgebildet. Wir haben also eine stetige Abbildung $M \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ konstruiert, die genau ∂M nach $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ abgebildet.
Verklebt man zwei Möbiusbänder entlang ihres Rands, so erhält man eine Kleinsche Flasche. Durch Spiegeln obiger Abbildung an $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, erhält man also eine stetige Abbildung von der Kleinschen Flasche nach $\mathbb{R}^3$. Eine solche kann nicht injektiv sein.
Also existieren $(a, c), (b, d) \in \gamma^2$ mit $(a, c) \neq (b, d), (d, b)$ sodass $\Phi(a, c) = \Phi(b, d)$. Damit gilt auch $a \neq c$, $b \neq d$ und a, b, c, d sind vier verschiedene Punkte auf γ. Die Strecken $[a, c]$, $[b, d]$ sind gleich lang und haben den gleichen Mittelpunkt. Somit bilden sie die Diagonalen eines Rechtecks a, b, c, d das in γ eingeschrieben ist. ▲

Legt man das Seitenverhältnis fest, kommt man zu einer im Jahr 1911 aufgestellten Vermutung, die noch immer offen ist:

Vermutung 5 (Toeplitz [Toe11]). *In jede Jordankurve lässt sich ein Quadrat einschreiben.*

Literatur

[Mey80] M.D. Meyerson. „Equilateral triangles and continuous curves“. In: *Fund. Math.* Jg. 110, Nr. 1, S. 1–9, 1980.

[Toe11] O. Toeplitz. „Über einige Aufgaben der Analysis situs“. In: *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft* Jg. 94, S. 197, 1911.

[Vau77] H. Vaughan. „Rectangles and simple closed curves“. Lecture. Year approximate. 1977.

[2] Für glatte Jordankurven lässt sich dies über den Konfigurationsraum und die Testabbildung präzise formulieren.