Mathemagika: Mathematik und Zaubern

Proseminar

Sommersemester 2021

Zauberei zieht Menschen seit Jahrhunderten, ja Jahrtausenden, in ihren Bann. Seit dem 18. Jahrhundert spricht man von Zauberkunst als einer Form der darstellenden Kunst. Sie wird beschrieben als ein Spiel mit der Realität, bei der Illusionen scheinbar unmöglicher Effekte, Taten oder Situationen in den Köpfen der Betrachter ausgelöst werden.

Um eine Illusion zu erreichen, kommen verschiedene Techniken zum Einsatz, wie etwa Psychologie, Ausnutzung von Wahrnehmungslücken, Kunstgriffe, optische Täuschungen oder trickreiche Apparaturen, aber auch die Ausnutzung gemeinhin unbekannter physikalischer Zusammenhänge und mathematischer Gesetze.

Mit letzterem wollen wir uns in diesem Seminar befassen. Wie Professor Behrends in seinem Buch „Mathematik und Zaubern“ bemerkt sind algebraische Zahlentricks vielleicht der langweiligste Aspekt des Zusammenspiels von Mathematik und Zauberei. Man kann nicht nur Ergebnisse aus den unterschiedlichsten mathematischen Disziplinen in de Zauberei nutzen, nein, es gibt eine Fülle von Beispielen, bei denen ein Zaubertrick nicht ohne Diskussion eines recht anspruchsvollen mathematischen Hintergrunds vollständig erklärt werden kann.

Vorträge

In diesem Seminar werden wir uns an Hand von Professor Ehrhard Behrends' Buch „Mathematik und Zaubern“ mit interessanten Zaubertricks und deren mathematischen Grundlagen befassen. In jedem Vortrag soll ein Zaubertrick im Hinblick auf die darunterliegende Mathematik analysiert werden.

Bitte beachten Sie auch die Referenzen, die auf der Seminarwebseite angegeben werden. Es wird empfohlen die Hinweise zum Halten eines Seminarvortrages, die Sie dort ebenfalls finden, zu lesen.

1. **Invarianten**:
   Invarianten sind Eigenschaften, die bei gewissen Transformationen erhalten bleiben. Für die Kartentricks sind Eigenschaften interessant, die ein Kartenspiel auch nach chaotisch aussehenden Mischoperationen noch hat. In diesem Vortrag wird eine solche Invariante behandelt, die auf den amerikanischen Zauberer Bob Hummer zurückgeht.

   Literatur: [3], Kapitel 1.

   Ergänzende Literatur: [15].

2. **Magische Quadrate und magische Würfel**:
   Hier geht es um Folgerungen aus Kommutativ- und Assoziativgesetz. Ein Zuschauer wählt mit Zahlen beschriftete Felder eines quadratischen Rasters. Die Summe dieser Zahlen steht schon vorher fest, was schwer zu durchschauen ist.

   Literatur: [3], Kapitel 2.

3. **Magische Quadrate mit vorgegebener erster Zeile**:
   Dieser Vortrag setzt die Untersuchung der magischen Quadrate mit Methoden der linearen Algebra fort. Insbesondere gehen hier Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen ein.

   Literatur: [3], Kapitel 3.

   Ergänzende Literatur: [6].

4. **Zauberhafte Normalteiler**:
   Ein Kartenspiel wird durch Mischen in eine scheinbar chaotische Reihenfolge gebracht, doch am Ende ist die ursprüngliche Ordnung wiederhergestellt. Schlüssel zur Erklärung sind Eigenschaften von Normalteilern.

   Literatur: [3], Kapitel 4.

5. **Magische Dreiecke**:
   Karten werden in eine Reihe gelegt und nach einfachen Regeln zu einem Dreieck ergänzt. Die Farbe der letzten zu legenden Karte ist dem Zauberer schon bekannt, wenn die erste Reihe liegt. Dies kann durch Teilbarkeitseigenschaften von Binomialkoeffizienten erklärt werden.

   Literatur: [3], Kapitel 5.

   Ergänzende Literatur: [9].

6. **Magische Pyramiden**:
   Hier werden Ideen aus dem vorherigen Vortrag verallgemeinert zum Zaubern in drei Dimensionen. Auch der mathematische Hintergrund ist ähnlich.

   Literatur: [3], Kapitel 6.

   Ergänzende Literatur: [9].

7. **Hyperpyramiden**:
   Dieser Vortrag geht noch einen Schritt weiter und erarbeitet eine Verallgemeinerung der beiden vorherigen Themen in beliebiger Dimension. Während dies für Zauberer in unserer Welt nicht unbedingt relevant ist, zeigt dies, dass es für Mathematiker möglich ist, die durch unsere eingeschränkte Sinneswahrnehmung gegebenen Grenzen zu überschreiten.

   Literatur: [3], Kapitel 7.

   Ergänzende Literatur: [9].

8. **Melkmischen und Zahlentheorie**:
   Hier steht das Mischen eines Kartenspiels nach einer besonderen Methode, dem sogenannten "milk shuffle" im Mittelpunkt. Mathematisch gesehen geht es um Permutationen von endlich vielen Elementen. Zur Erklärung werden zahlentheoretische Resultate herangezogen, die mit der Artin'schen Vermutung in Zusammenhang stehen.

   Literatur: [3], Kapitel 8.

   Ergänzende Literatur: [8].

9. **Fibonacci zaubert mit quadratischen Resten**:
   Hier geht es um einen Vorhersagetrick, der auf Fibonaccizahlen beruht. Die dem Trick zugrundeliegende Mathematik kann leicht erklärt werden. Wenn man allerdings den Hintergrund verstehen möchte, kommt man recht schnell zu etwas anspruchsvolleren Bereichen der Zahlentheorie.

Literatur: [3], Kapitel 9.

Ergänzende Literatur: [14].

10. **Australisches Ausgeben**:
Beim „australischen Ausgeben“ wird auf ganz spezielle Weise eine Karte nach der anderen aus einem Kartenspiel ausgewählt. Man braucht eine wenig offensichtliche Formel um zu berechnen, welche Karte übrig bleiben wird. Dieses Wissen lässt sich in viele interessante Zaubertricks umsetzen. Der mathematische Hintergrund ist relativ verwickelt, und viele naheliegende Fragen sind noch offen.

    Literatur: [3], Kapitel 10.

11. **Palindrome**:
Ein Palindrom ist ein Wort (oder Satz), das von hinten und vorne gelesen das gleiche ergibt. Wenn man weiß, wie man palindromische Kartenstapel erzeugen kann, und unter welchen Operationen die Palindromeigenschaft erhalten bleibt, lässt sich das in interessante Zaubertricks umsetzen. Die darunterliegende Mathematik beruht auf Eigenschaften der symmetrischen Gruppe.

    Literatur: [3], Kapitel 11.

    Ergänzende Literatur: [2].

12. **Die mysteriöse Zahl 1089**:
In einem klassischen Trick wird aus beliebigen dreistelligen Zahlen mithilfe arithmetischer Operationen garantiert die Zahl 1089 generiert. In diesem Vortrag soll eine Verallgemeinerung für Zahlen mit beliebig vielen Stellen vorgestellt werden. Es tauchen an unerwarteter Stelle wieder die Fibonaccizahlen auf.

    Literatur: [3], Kapitel 12.

13. **Der beste Kartentrick**:
Hier wird ein Codierungstrick vorgestellt, in dem Zauberer und Helfer einen schwer zu durchschauenden Code vereinbaren, um die Nachricht zu übertragen, welche Karte von einem Zuschauer ausgwählt wurde.

    Literatur: [3], Kapitel 13.

    Ergänzende Literatur: [10, 2].

14. **Codierung mit deBruijn-Folgen**:
DeBruijn-Folgen sind bestimmte Binärfolgen, die sich in die Graphentheorie übersetzen lassen. Sie bilden die Grundlage für den Codierungstrick dieses Kapitel. Weiterhin finden deBuijn-Folgen Anwendung in der Biologie und Informatik.

    Literatur: [3], Kapitel 14.

    Ergänzende Literatur: [5, 12, 4].

15. **(Fast) immer gewinnen**:
In diesem Vortrag geht es um einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Trick. Die Mathematik im Hintergrund ist interessant, man kann jedoch nicht mit Sicherheit sagen, ob er auch klappen wird – die Wahrscheinlichkeit, dass alles gut geht, ist allerdings beruhigend hoch.

    Literatur: [3], Kapitel 15.

    Ergänzende Literatur: [1, 11].

Literatur

[1] Behrends Ehrhard — *Elementare Stochastik*. Springer Spektrum, Wiesbaden (2012).

[2] Behrends Ehrhard — *Der mathematische Zauberstab*. Rowohlt (2015).

[3] Behrends Ehrhard — *Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker*. Springer Spektrum, Wiesbaden (2017).

[4] Diaconis Persi, Graham Ron — *Magical Mathematics*. Princeton University Press (2012).

[5] Diestel Reinhard — *Graphentheorie*. Springer Spektrum Berlin (2017).

[6] Fischer Gerd, Springborn Boris – *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg (2020).

[7] Gardner Martin — *Mathematische Zaubereien*. Dumont (2004).

[8] Hooley Christopher — *On Artin's conjecture*. J. Reine Angew. Math. vol. 225, pp. 209–220 (1967).

[9] Joris Henri, Oestreicher Christian, Steinig John – *The greatest common divisor of certain sets of binomial coefficients*. J. Number Theory vol. 21, pp. 101–119 (1985).

[10] Kleber Michael – *The best Card Trick*. Mathematical Intelligencer vol. 24, no. 1 (2002).

[11] Klenke Achim — *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2020).

[12] Krumke Sven Oliver, Noltemeier Hartmut — *Graphentheoretische Konzepte*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (2012).

[13] Mulcahy Colm — *Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects*. Taylor & Francis Ltd. (2013).

[14] Ribenboim Paulo — *Die Welt der Primzahlen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011)

[15] Schur Issai — *Vorlesungen über Invariantentheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1968).

[16] Willems Wolfgang — *Codierungstheorie und Kryptographie*. Birkhäuser Basel (2008).