

---

## Algebra Examenskurs Übungsblatt 6

Thema: Körpertheorie I (§3.4 – §3.7)

### 1 Aufwärmübungen

**Aufgabe 1.1.** Seien  $L/K$  und  $K/M$  zwei Galoisweiterungen. Ist  $L/M$  auch eine Galoisweiterung?

**Aufgabe 1.2.** Sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ , wobei  $i \in \mathbb{C}$  die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$  ist. Bestimmen Sie die zugehörige Galoisgruppe  $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  und alle Teilkörper von  $K$ .

### 2 Aufgaben

**Aufgabe 2.1** (H16-T3-A4). Finden Sie zwei Polynome  $f, g \in \mathbb{Q}[x]$  gleichen Grades, sodass  $\text{Gal}(f)$  und  $\text{Gal}(g)$  gleich viele Elemente haben, aber  $\text{Gal}(f)$  abelsch und  $\text{Gal}(g)$  nicht abelsch ist.

**Aufgabe 2.2** (F16-T3-A5). Sei  $f(x) = X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ .

a) Zeigen Sie, dass

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \sqrt{3}}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2$$

die Nullstellen von  $f$  in  $\mathbb{C}$  sind.

b) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}(\alpha_1) \neq \mathbb{Q}(\alpha_2)$  (als Teilkörper von  $\mathbb{C}$ ).

c) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2)$ .

d) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1)$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_2)$  galoissch sind.

e) Sie  $K$  der Zerfällungskörper von  $f$  über  $\mathbb{Q}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset K$  galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe.

**Viel Erfolg!**