**Hinweis.** Die Aufgaben sind aus Staatsexamina früherer Jahre entnommen. Die in Klammern angegebene Punktzahl ist die Punktzahl die damals erreicht werden konnte und ist nur zu Ihrer Orientierung angegeben.

**Aufgabe 8.1** (F14T2A2)**.** Man bestimme alle Paare von Primzahlen $p, q$ mit $p^2 - 2q^2 = 1$. (10 Punkte)

**Aufgabe 8.2** (F12T2A3)**.** Bestimmen Sie alle Teiler von 6 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + b\sqrt{-6} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (6 Punkte)

**Aufgabe 8.3** (F04T2A2)**.** Der Ring $R = \left\{n + m\sqrt{-2}\ ;\ n, m \in \mathbb{Z}\right\}$ ist bekanntlich ein euklidischer Ring bezüglich der Norm $N\left(n + m\sqrt{-2}\right) = n^2 + 2m^2$.

(a) Zeigen Sie, daß 11 ein zerlegbares und 13 ein unzerlegbares Element in $R$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß der Restklassenring $R/13R$ ein Körper ist. Aus wievielen Elementen besteht er?

(c) Verwenden Sie den Chinesischen Restsatz, um den Restklassenring $R/11R$ als direktes Produkt von zwei Körpern darzustellen.

(6 Punkte)

**Aufgabe 8.4** (F04T3A4)**.** Für ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne $f'$ die Ableitung. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, und sei $I$ die Menge aller Polynome $f \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$f(a_i) = f'(a_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

(a) $I$ ist ein Ideal im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.

(b) $I$ wird erzeugt von dem Polynom $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$.

(c) Wie viele Ideale besitzt der Faktorring $\mathbb{R}[x]/I$?

(6 Punkte)

**Aufgabe 8.5** (H07T1A3)**.** Sei $R$ ein Integritätsring, und $M$ bezeichne die Vereinigung aller maximalen Ideale in $R$. Zeigen Sie, daß für die Einheitengruppe $R^*$ von $R$ gilt

$$R^* = R \backslash M.$$

(6 Punkte)