Hinweis. Die Aufgaben sind aus Staatsexamina früherer Jahre entnommen. Die in Klammern angegebene Punktzahl ist die Punktzahl die damals erreicht werden konnte und ist nur zu Ihrer Orientierung angegeben.

Aufgabe 4.1 (H04T1A1)**.** Bestimmen Sie je eine 2-Sylowgruppe in

(a) der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$,

(b) der alternierenden Guppe A_5,

(c) der alternierenden Gruppe A_6.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.2 (H11T1A1)**.** Sei p eine Primzahl und $\mathfrak{S}_p$ die symmetrische Gruppe vom Grad p.

(a) Bestimmen SIe die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p.

(b) Zeigen Sie: Die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von $\mathfrak{S}_p$ beträgt $(p-2)!$.

(c) Folgern Sie aus (a) die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

(9 Punkte)

Aufgabe 4.3 (H14T2A4)**.** Sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und P eine p-Sylowgruppe von G für eine Primzahl p, die die Ordnung von H teilt.

(a) Zeigen Sie, daß es stets ein $g \in G$ gibt, so daß $H \cap g^{-1}Pg$ eine p-Sylowgruppe von H ist. (6 Punkte)

(b) Zeigen Sie an einem Beispiel, daß $H \cap P$ nicht notwendig eine p-Sylowgruppe von H ist. (6 Punkte)

Aufgabe 4.4 (H14T3A1)**.** Es sei G eine Gruppe mit 2014 Elementen. Zeigen Sie, daß G einen zyklischen Normalteiler der Ordnung $1007 = 19 \cdot 53$ besitzt. (11 Punkte)

Aufgabe 4.5 (F15T3A2)**.** Seien p, q, r Primzalen mit $p < q < r$ und $pq < r + 1$. Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung pqr auflösbar ist. (12 Punkte)