Hinweis. Die Aufgaben sind aus Staatsexamina früherer Jahre entnommen. Die in Klammern angegebene Punktzahl ist die Punktzahl die damals erreicht werden konnte und ist nur zu Ihrer Orientierung angegeben.

Aufgabe 3.1 (F15T2A4). (a) Die Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge Ω mit $|\Omega| > 1$. Man zeige: Hat jedes Element aus G mindestens einen Fixpunkt, dann ist G eine Vereinigung der Konjugierten hUh^{-1}, $h \in G$, einer echten Untergruppe U von G. (8 PUnkte)

(b) Für $n > 1$ sei $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen. Man gebe eine echte Untergruppe U von G and, so dass G die Vereinigung der Konjugierten von U ist. (Hinweis: Betrachte die Operation von G auf den 1-dimensionaln Unterräumen von $\mathbb{C}^n$.) (10 Punkte)

Aufgabe 3.2 (F02T3A2). Sei G eine endliche Gruppe und $U \subset G$ eine Untergruppe vom Index n. Durch die Wirklung von G auf G/U wird ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$ definiert (dies muss nicht gezeigt werden).

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset U$.

(b) Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$und $[G : U] = p$. Zeigen Sie: U ist normal in G.

(5 Punkte)

Aufgabe 3.3 (F07T2A1). Betrachten Sie die folgenden vier nicht abelschen Gruppen der Ordnung 24

$$\mathfrak{S}_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}\,/\,\mathbb{Z}\,2, S_3 \times \mathbb{Z}\,/\,\mathbb{Z}\,2 \times \mathbb{Z}\,/\,\mathbb{Z}\,2.$$

Dabie sind $\mathfrak{S}_n$ die symmetrische Gruppe auf n Elementen, D_n die Diedergruppe mit $2n$ Elementen, $\mathbb{Z}\,/\,\mathbb{Z}\,2$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in allen vier Gruppen.

(b) Bestimmen Sie (mit Begründung), welche der vier Gruppen zueinander isomorph sind (und welche nicht).

(6 Punkte)

Aufgabe 3.4 (H10T2A2). Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G heißt maximal, wenn G die einzige Untergruppe von G ist, die U echt enthält.
Zeigen Sie für jede natürliche Zahl $n \geqslant 4$: Jede maximale Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ hat Ordnung $\geqslant n$.
(Tipp: Man unterscheide die Fälle, in denen eine maximale Untegruppe von $\mathfrak{S}_n$ transitiv bzw. nicht transitiv operiert.) (6 Punkte)

Aufgabe 3.5 (H10T2A3). Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ einer Gruppe G sei zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist. (6 Punkte)