Aufgabe 1 (Frühjahr 2015)**.** Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

(a) G einen Normalteiler N der Ordnung 5 oder 7.

(b) G ist auflösbar.

Aufgabe 2 (Herbst 1986)**.** Sei p eine Primzahl und N der Normalisator einer p-Sylowgruppe der symmetrischen gruppe S_p. Zeigen Sie: $|N| = p(p-1)$.
HINWEIS: Zählen Sie die Elemente der Ordnung p von S_p.

Aufgabe 3. Geben Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 2019 an.

Aufgabe 4. Man zeige, daß keine Gruppe der Ordnung 200 einfach ist.

Aufgabe 5. Man zeige:

(a) Jede Untergruppe der $\mathfrak{S}_4$ ist genau zu einer der folgenden Gruppen isomorph:

$$\{e\}, \quad \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}, \quad V \cong D_2, \quad S_3 \cong D_3, \quad D_4, \quad A_4, \quad \mathfrak{S}_4.$$

(b) Die einzigen Normalteiler von $\mathfrak{S}_4$ sind $\{e\}$, V, A_4, $\mathfrak{S}_4$.

Aufgabe 6. Sei G nilpotent, $\{e\} \neq N \triangleleft G$. Man zeige: $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.