Aufgabe 1 (Herbst 1974)**.** Man beweise:

(a) Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sind $H, I, J \subseteq G$ Untergruppen mit $H \subseteq I \cup J$, dann ist $H \subseteq I$ oder $H \subseteq J$.

(b) Es gibt eine Gruppe $(G, \cdot)$ mit Untergruppen H, I, J, K, so daß $H \subseteq I \cup J \cup K$, aber weder $H \subseteq I$ noch $H \subseteq J$ noch $H \subseteq K$ gilt.
Hinweis: Man betrachte $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Lösung. **(a)** Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann enthält H Elemente $i \in I \setminus (I \cap J)$ und $j \in J \setminus (I \cap J)$. Da H selbst wieder eine Gruppe ist, ist $i \cdot j \in H \subseteq I \cup J$. Also ist $i \cdot j \in I$ oder $i \cdot j \in J$. O.B.d.A. sei $i \cdot j \in I$. Da I eine Guppe ist, ist dann auch $j = i^{-1} \cdot i \cdot j \in I$. Widerspruch. Also ist $H \subseteq I$ oder $H \subseteq J$.

(b) Die Gruppe $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ mit komponentenweiser Addition hat Ordnung 4. Sie hat drei Untergruppen der Ordnung 2:

$$\begin{aligned} I &= \{(0,0), (0,1)\} \\ J &= \{(0,0), (1,0)\} \\ K &= \{(0,0), (1,1)\} \end{aligned}$$

Als Mengen ist $I \cup J \cup K = G$. Wähle also $H = G$.

Aufgabe 2 (Frühjahr 1999)**.** Seien U und V Untergruppen einer endlichen Gruppe G mit $U \cap V = \{e\}$. Es bezeichne $\langle U \cup V \rangle$ die von $U \cup V$ erzeugte Untergruppe von G. Man zeige:

(a) $|U| \cdot |V| \leqslant |\langle U \cup V \rangle|$.

(b) In (a) gilt Gleichheit, wenn U Normalteiler in G ist. *(Das werden wir nächste Woche besprechen.)*

(c) Man gebe eine Gruppe G mit zwei Untergruppen U und V mit $U \cap V = \{e\}$ an, so daß in (a) nicht Gleichheit besteht.

Lösung. **(a)** Nach Definition enthält $\langle U \cup V \rangle$ alle Elemente der Form uv mit $u \in U$ und $v \in V$. Wir zeigen, daß diese paarweise verschieden sind. Angenommen, es wäre $u_1 v_1 = u_2 v_2$. Dann ist

$$u_2^{-1} u_1 v_1 v_2^{-1} = e.$$

Insbesondere ist $u_1 v_1 v_2^{-1}$ Inverses von u_2^{-1} in U, und damit $u_1 v_1 v_2^{-1} \in U$. Es folgt, daß

$$v_1 v_2^{-1} = u_1^{-1} u_1 v_1 v_2^{-1} \in U \cap V = \{e\}.$$

Damit auch $u_2^{-1} u_1 = e$. Wegen der Eindeutigkeit des Inversen ist $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$.
Es folgt, daß die Anzahl der Elemente von der Form uv mit $u \in U$ und $v \in V$ genau $|U| \cdot |V|$ ist. Und damit

$$|U| \cdot |V| \leqslant |\langle U \cup V \rangle|.$$

(c) Betrachte die symmetrische Gruppe

$$G = \mathfrak{S}_3 = \left\{ e, a = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \right\}$$

mit den Relationen $a^3 = e$, $a^{-1} = a^2$, $b^2 = c^2 = d^2 = e$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$, $d^{-1} = d$, $ab = d$, $a^2 b = c$.
Betrachte weiter zwei der Untergruppen von G der Ordnung zwei

$$U = \langle b \rangle = \{e, b\} \quad \text{und } V = \langle d \rangle = \{e, d\}.$$

Dann ist $|U| \cdot |V| = 4$.
Andererseits enthält die Untergruppe $\langle U \cup V \rangle = \langle b, d \rangle$ das Element $db = ab^2 = a$. Also ist

$$G = \langle a, b \rangle \subseteq \langle U \cup V \rangle \subseteq G$$

und damit gilt Gleichheit. Also

$$|\langle U \cup V \rangle| = |G| = 6$$

und damit

$$|U| \cdot |V| < |\langle U \cup V \rangle|.$$

Aufgabe 3 (Herbst 1978)**.** Man beweise, daß eine Gruppe genau dann endlich ist, wenn sie nur endlich viele Untergruppen hat.

Lösung. Sei G zunächst eine endliche Gruppe. Insbesondere ist G eine endliche Menge (wenn man die Gruppenstruktur vergisst). Dann ist ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$, also die Menge aller Teilmengen von G, auch endlich. Da alle Untergruppen auch Teilmengen sind, und es nur endlich viele Teilmengen gibt, hat G also nur endlich viele Untergruppen.
Nehmen wir andererseits an, daß G nur endlich viele Untergruppen besitzt. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Angenommen G besitzt ein element x unendlicher Ordnung. Die davon erzeugte zyklische Untergruppe $\langle x \rangle$ hat bereits unendlich viele Untergruppen, also hätte auch G unendlich viele Untergruppen, was nach Voraussetzung unmöglich ist.
Also nehmen wir an, daß G nur Elemente endlicher Ordnung besitzt und zeigen, daß es nur endlich viele sind. Betrachte die Abbildung

$$G \to \{ \text{ zyklische Untergruppen von } G \ \}, x \mapsto \langle x \rangle.$$

Da es nur endlich viele Untergruppen gibt, gibt es nur endlich viele zyklische Untergruppen. Jede zyklische Untergruppe hat nach Voraussetzung nur endlich viele Elemente, also nur endlich viele Erzeuger. Also gibt es nur endlich viele Elemente in G, die zyklische Untergruppen erzeugen, also muß G selbst endlich sein.

Aufgabe 4 (F14T2A2)**.** Sei $r \in \mathbb{Z}$ Summe zweier Quadrate. Dann ist auch $2r \in \mathbb{Z}2$ Summer zweier Quadrate.

Lösung. Sei $r = a^2 + b^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} 2r &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + (2ab - 2ab) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2 \end{aligned}$$