Aufgabe 1 (Frühjahr 2014). Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung. Zeigen Sie, daß für $\alpha \in L$ folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Es gilt $L = K(\alpha)$.

(b) Für alle $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $g \neq \mathrm{id}$ gilt $g(\alpha) \neq \alpha$.

Aufgabe 2 (Herbst 2003). Gegeben sei das Element $z = X^2 + X^{-2}$ des rationalen Funktionenkorpers $\mathbb{Q}(X)$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ endlich vom Grad $\leqslant 4$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{Q}(X)$ die z festlassen.

(c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ Galois'sch ist und geben Sie alle Körper zwischen $\mathbb{Q}(X)$ und $\mathbb{Q}(z)$ an.

Aufgabe 3 (Frühjahr 2004). Es sei K/k eine Galoiserweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist. Zeigen Sie:

(a) K enthält n zueinander konjugierte Zwischenkörper vom Grad n über k, die zusammen K über k erzeugen.

(b) K ist der Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad n aus $k[X]$ über k

Aufgabe 4 (Herbst 2004). Es sei $K = \mathbb{F}_{3^3}$ der Körper mit 27 Elementen. Was ist die Ordnung der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_3)$? In wieviele und wie lange Bahnen zerfällt K unter der Operation von G?