Aufgabe 1 (Frühjahr 1980)**.** Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Jede Erweiterung von K vom Grad 2 ist normal über K.

Lösung. Sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad zwei, das heißt L ist ein K-Vektorraum von Dimension 2,

$$[L:K] = \dim_K(L) = 2.$$

Also ist $K \subsetneq L$ und es gibt $\alpha \in L \backslash K$. Sei $m_\alpha \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über K. Es ist

$$\deg(m_\alpha) > 1,$$

denn sonst wäre $\alpha \in K$. Außerdem ist

$$\deg(m_\alpha) = [K(\alpha):K] \big| [L:K] = 2.$$

Also

$$\deg(m_\alpha) = 2$$

Es folgt $L = K(\alpha)$. Sei β die zweite Nullstelle von m_α, also haben wir in einem Oberkörper die Zerlegung

$$m_\alpha = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta \in K[X].$$

Insbesondere ist $\alpha+\beta \in K \subset K(\alpha)$ (und $\alpha\beta \in K$). Da $\alpha \in K(\alpha)$ ist auch $\beta \in K(\alpha)$. Wir haben gezeigt, daß L Zerfällungskörper des Polynoms $m_\alpha \in K[X]$ ist.

Aufgabe 2 (Herbst 2002)**.** (a) Zerlegen Sie das Polynom $f := X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren.

(b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper Z von f über $\mathbb{Q}$ und $[Z:\mathbb{Q}]$.

Lösung. **Zu (a):** Wir sehen, daß X nur in gerader Potenz vorkommt und substituieren $Y := X^2$:

$$g(Y) = Y^3 + 4Y^2 + 4Y + 3,$$

mit $f(X) = g(X^2)$. Eine Nullstelle von g ist -3, also $(Y+3)\big| g \in \mathbb{Q}[Y]$ Polynomdivision liefert

$$g = (y+3)(Y^2 + Y + 1)$$

und Y^2+Y+1 ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ (nach dem Reduktionskriterium modulo 2 und dem Satz von Gauß). Wir erhalten

$$f = (X^2+3)(X^4+X^2+1).$$

Der erste Faktor ist irreduzibel (da es ein Eisensteinpolynom in $\mathbb{Z}[X]$ ist). Den zweiten Faktor schreiben wir als

$$X^4+X^2+1 = X^4+2X^2+-X^2+1 = (X^2+1)^2-X^2 = \big((X^2+1)+X\big)\big((X^2+1)-X\big) = (X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

Beide dieser Faktoren sind irreduzibel über $\mathbb{Z}$ (also auch über $\mathbb{Q}$), nach dem Reduktionskriterium modulo 2.
Insgesamt

$$f = X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3 = (X^2+3)(X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

Zu (b):

- Nullstellen von X^2+3: $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-3}$
- Nullstellen von X^2+X+1: $\alpha_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$
- Nullstellen von X^2-X+1: $\alpha_{5,6} \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

Behauptung: $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ist der Zerfällungskörper von f.
Natürlich ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_6)$. Man sieht leicht, daß alle α_i Linerarkombinationen von 1 und $\sqrt{-3}$ über $\mathbb{Q}$ sind. Also $\alpha_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, und damit

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_6)$$

und dies ist der Zerfällungskörper Z von f und es gilt $[Z:\mathbb{Q}] = 2$.

Aufgabe 3 (Frühjahr 1984)**.** Es sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom und α, β Nullstellen von f in einem geeigneten Erweiterungskörper von K. Es sei $\gamma = \alpha - \beta \in K$. Zeigen Sie:

(a) $f(X + \gamma)$ ist normiert und irreduzibel in $K[X]$.

(b) Für jede natürliche Zahl n gilt $f(X + n\gamma) = f$.

(c) $\alpha = \beta$.

Lösung. **Zu (a):** Da $\gamma \in K$ definiert

$$\varphi : K[X] \to K[X], X \mapsto X - \gamma$$

einen Automorphismus mit inversem $\varphi^{-1} : K[X] \to K[X], X \mapsto X + \gamma$. Sei $f_1 := f(X+\gamma)$, dann ist $\varphi(f_1) = f$ und $\varphi^{-1}(f) = f_1$. Da f irreduzibel ist, ist auch f_1 irreduzibel (genauer: f ist genau dann irreduzibel, wenn f_1 irreduzibel ist). Ebenso ist f_1 normiert, da f normiert ist.

Zu (b): Sei $f_n := f(X + n\gamma)$. Da $\varphi^n(f_n) = f$ (und $\varphi^{-n}(f) = f_n$) ist auch f_n normiert und irreduzibel.
Da f normiert und irreduzibel ist, und $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ist f das Minimalpolynom von α und β. Ebenso gilt

$$f_1(\beta) = f(\beta + \gamma) = f(\alpha) = 0.$$

Da f_1 normiert und irreduzibel ist, ist f_1 Minimalpolynom von β. Es folgt $f_1 = f$, und damit ist auch $f_1(\alpha) = 0$. Dies ist der Induktionsanfang.
Angenommen, wir wissen ebreits, daß $f = f_1 = \ldots = f_n$. Dann ist

$$f_{n+1}(\beta) = f(\beta + (n+1)\gamma) = f(\alpha + n\gamma) = f_n(\alpha) = f(\alpha) = 0.$$

Da f_n normiert und irreduzibel ist, und $f_{n+1}(\beta) = 0$ ist f_{n+1} Minimalpolynom von β. Es folgt $f_{n+1} = f$.

Zu (c): Da $f_n(\alpha) = f_n(\beta) = 0$ für alle n, sind die Elemente $\alpha + n\gamma$ und $\beta + n\gamma$ Nullstellen von f. Da f nur endlich viele Nullstellen haben kann, gibt es $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\alpha + n_1\gamma = \alpha + n_2\gamma.$$

Es folgt $0 = \gamma$, also $\alpha = \beta$ da K Charakteristik 0 hat.

Aufgabe 4 (Herbst 1991)**.** $K(z)$ sei eine einfache transzendente Erweiterung des Körpers K. Man beweise die beiden folgenden Aussagen:

(a) $K(z^2)$ ist eine transzendente Erweiterung von K.

(b) Es gibt unendlich viele Zwischenkörper zwischen K und $K(z)$.

Lösung. **Zu (a):** Nach Voraussetzung ist z transzendent über K. Wir zeigen, daß z^n für $n \in \mathbb{N}$ transzendent über K ist. Angenommen z^n ist nicht transzendent über K dann gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ mit $f(z^n) = 0$. Dann ist aber z Nullstelle des Polynoms $g(X) = f(X^n) \in K[X]$. Widerspruch zur Annahme, daß z transzendent über K ist.

Zu (b): Es ist klar, daß $K \subset K(z^n) \subset K(z)$. Wir wollen sehen, daß diese Zwischenkörper verschieden sind. Dazu berechnen wir den Grad der Körpererweiterungen $K(z^n) \subset K(z)$.
Natürlich ist z Nullstelle der Polynoms $X^n - z^n \in K(z^n)[X]$. Also teilt das Minimalpolynom von z über $K(z^n)$ dieses Polynom, und $[K(z) : K(z^n)] \leqslant n$. Da z transzendent über K ist, sind die $\{1, z, \ldots, z^{n-1}\}$ linear unabhängig über $K(z^n)$, deshalb $[K(z) : K(z^n)] \geqslant n$, und damit

$$[K(z) : K(z^n)] = n.$$

Also sind die $K(z^n)$ unterschiedliche Unterkörper von $K(z)$ die K enthalten.